ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2023

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ 111

Α2. Θεωρία σελ 104

Α3. Θεωρία σελ 128

Α4.α. Λάθος β. Λάθος γ. Λάθος δ. Σωστό ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πρέπει $x \in D_h \Rightarrow x > 0$ και $h(x) \in D_g \Rightarrow x \in R$ άρα $D_{g\circ h} = (0,+\infty)$.

Για κάθε $x > 0$ είναι:

$$f(x) = (g\circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{4-e^{2h(x)}}{e^{h(x)}} = \frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}} = \frac{4-e^{\ln x^2}}{e^{\ln x}} = \frac{4-x^2}{x} = \frac{4}{x} - x.$$

Β2.i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = \left(\frac{4}{x} - x\right)' = -\frac{4}{x^2} - 1 < 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

ii. Είναι:

$$e < \pi \overset{f:\downarrow}{\Leftrightarrow} f(e) > f(\pi) \Leftrightarrow \frac{4-e^2}{e} > \frac{4-\pi^2}{\pi} \overset{\cdot e\pi>0}{\Leftrightarrow} \pi(4-e^2) > e\cdot\left(4-\pi^2\right) \overset{:\left[e(4-e^2)\right]<0}{\Leftrightarrow} \frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e}$$

Β3. Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{4-x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left[(4-x^2)\cdot\frac{1}{x}\right] = +\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(4-x^2\right) = 4$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = +\infty$ άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2} = -1 = \lambda \in R$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x} + x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-x^2+x^2}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{x} = 0 = \beta \in R$ άρα η C_f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y = \lambda x + \beta$ δηλαδή την ευθεία $y = -x$.

Β4. Είναι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$ οπότε υπάρχει $x_0>0$ έτσι ώστε για κάθε $x>x_0$ να ισχύει $f(x)<0$.
Επίσης για κάθε $x\in R$ είναι:

$$-1\le \sigma\upsilon\nu\left(x^2+1\right)\le 1 \overset{:f(x)<0}{\Leftrightarrow} \frac{-1}{f(x)}\ge \frac{\sigma\upsilon\nu\left(x^2+1\right)}{f(x)}\ge\frac{1}{f(x)}$$

και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{f(x)}\right)=0$, σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(x^2+1\right)}{f(x)}=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\int_2^3 xf(x)dx=\int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+a\right)dx=\int_2^3(1+ax)\,dx=\left[x+\frac{ax^2}{2}\right]_2^3=3+\frac{9a}{2}-(2+2a)=1+\frac{5a}{2}$

Όμως $\int_2^3 xf(x)dx=1\Leftrightarrow 1+\frac{5a}{2}=1\Leftrightarrow\frac{5a}{2}=0\Leftrightarrow a=0$ άρα $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+3\,, & x<1\\ \frac{1}{x} & ,x\ge 1\end{cases}$.

Γ2.i. $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^-}(x-2)=-1$

και $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\frac{-(x-1)}{x}}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$ οπότε επειδή

$\lim\limits_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-1$ άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ με $f'(1)=-1$.

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=-1(x-1)\Leftrightarrow y=-x+2.$$

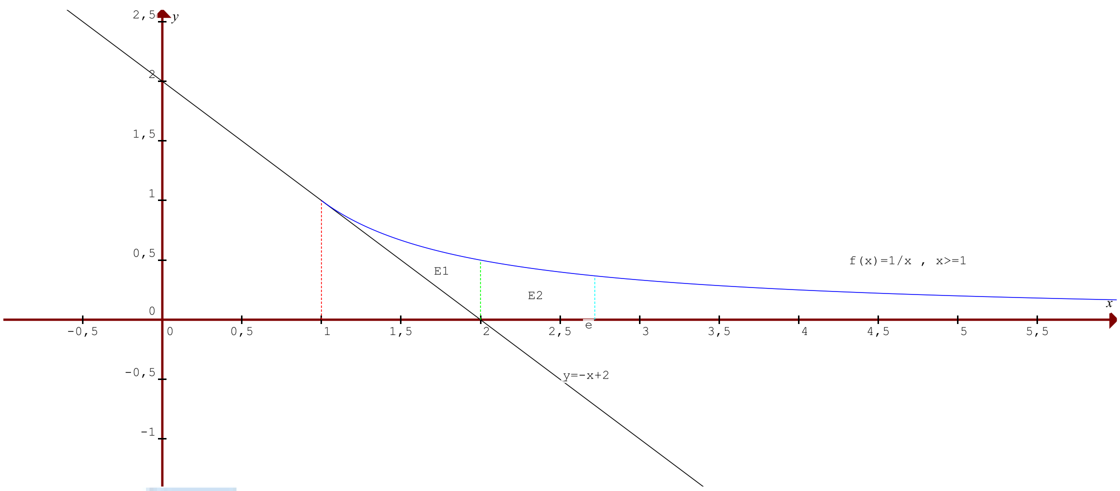
με συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=f'(1)=-1$.
Γνωρίζουμε ότι $\lambda=\varepsilon\varphi\omega$ όπου ω η γωνία που σχηματίζει η εφαπτομένη με τον άξονα x΄x άρα $\varepsilon\varphi\omega=-1\Leftrightarrow\omega=135^0$.

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1)$ με $f'(x)=2x-3$ οπότε για $x<1\overset{\cdot 2}{\Leftrightarrow}2x<2\overset{-3}{\Leftrightarrow}$ $\overset{-3}{\Leftrightarrow}2x-3<-1<0$ και παραγωγίσιμη στο $[1,+\infty)$ με $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$ άρα για κάθε $x\in R$ ισχύει ότι $f'(x)<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R άρα και 1-1.

Επιπλέον $f\left(D_f\right)=f\left((-\infty,+\infty)\right)\overset{f:\downarrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)\right)=(0,+\infty)$ διότι:

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-3x+3\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$.

Γ4. Είναι $y=0 \Leftrightarrow -x+2=0 \Leftrightarrow x=2$ άρα η εφαπτομένη της C_f τέμνει τον άξονα x΄x στο 2. Επίσης για κάθε $x \geq 1$ είναι $f(x)>0$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$ και $f''(x)=\frac{2}{x^3}>0$ άρα η f είναι κυρτή άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη εκτός από το σημείο επαφής.



Το ζητούμενο εμβαδόν όπως φαίνεται και από το σχήμα είναι:

$$E=E1+E2=\int_1^2 \left(f(x)-y\right)dx+\int_2^e \left(f(x)-0\right)dx$$

με $\int_1^2 \left(f(x)-y\right)dx=\int_1^2 \left(\frac{1}{x}-(-x+2)\right)dx=\int_1^2 \left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx=\left[\ln x+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^2=$

$=\ln 2+2-4-(\ln 1+\frac{1}{2}-2)=\ln 2-2-\frac{1}{2}+2=\ln 2-\frac{1}{2}\,\tau.\mu$ και

$\int_2^e f(x)dx=\int_2^e \frac{1}{x}dx \overset{x>0}{=} \left[\ln x\right]_2^e=\ln e-\ln 2=1-\ln 2\,\tau.\mu.$ άρα το συνολικό εμβαδόν είναι

$E=1-\ln 2+\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\tau.\mu.$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}$ με $D_g=(0,1)\cup(1,2)$ και $\lim_{x\to 1} g(x)=\lambda$ οπότε

$(x-1)\cdot g(x)=f(x)-2x \Leftrightarrow (x-1)\cdot g(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa-2x$ επομένως:

$$\lim_{x\to 1}\left[(x-1)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to 1}\left[\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa-2x\right] \Rightarrow 0=\kappa-3 \Leftrightarrow \kappa=3$$

άρα $f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3$.

Δ2. Είναι $f(1)=\ln 1-1+3=2$ Η f είναι παραγωγίσιμη στο (0,2) με

$$f'(x)=\frac{1}{2-x}(2-x)'+\frac{1}{x^2}=-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x^2}=\frac{-x^2-x+2}{x^2(2-x)}.$$

Είναι $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-x+2}{x^2(2-x)}=0 \overset{x^2(2-x)>0}{\Leftrightarrow} -x^2-x+2=0 \Leftrightarrow x=1 \text{ ή } x=-2\,(απορ)$

Η f είναι γν. αύξουσα στο $(0,1]$ και γν. φθίνουσα στο $[1,2)$

x	0 1	2
$f'(x)$	+	−
$f(x)$	↑	↓

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)=-\infty$ διότι

$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln(2-x)+3\right)=3+\ln 2$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)=-\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{1}{x}+3\right)=\frac{7}{2}$ και $\lim\limits_{x\to 2^-}\ln(2-x)\underset{u\to 0^+}{\overset{2-x=u}{=}}\lim\limits_{x\to 0^+}\ln u=-\infty$. Παρατηρούμε ότι

$0\in f\left((0,1]\right)$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1] υπάρχει μοναδικό $x_1\in(0,1)$ ώστε $f(x_1)=0$. Επίσης $0\in f\left([1,2)\right)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [1,2) υπάρχει μοναδικό $x_2\in(1,2)$ ώστε $f(x_2)=0$. Άρα η f έχει ακριβώς δύο ρίζες. Επίσης έστω ότι $\frac{1}{3}\le x_1<1 \overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f\left(\frac{1}{3}\right)\le f\left(x_1\right)<f(1)\Leftrightarrow \ln\frac{5}{3}\le 0<2$ το οποίο είναι αδύνατο διότι $\frac{5}{3}>1\Leftrightarrow \ln\frac{5}{3}>\ln 1\Leftrightarrow \ln\frac{5}{3}>0$ άρα υποχρεωτικά $0<x_1<\frac{1}{3}$.

Δ3. Η f είναι συνεχής στο $\left[x_1,\frac{1}{3}\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(x_1,\frac{1}{3}\right)$ με

$f'(x)=\frac{-x^2-x+2}{x^2(2-x)}$ άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα

τουλάχιστον $\xi\in\left(x_1,\frac{1}{3}\right)$ άρα $\xi\in(0,1)$ ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right)-f(x_1)}{\frac{1}{3}-x_1}=\dfrac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}}=\dfrac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$

Επίσης $f'(x)=-\frac{1}{2-x}+\frac{1}{x^2}$ και $f''(x)=\frac{1}{(2-x)^2}(2-x)'-\frac{1}{x^4}(x^2)'=-\frac{1}{(2-x)^2}-\frac{2}{x^3}<0$

άρα η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα οπότε το ξ είναι μοναδικό άρα υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$ στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης ισούται με $\dfrac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$.

Δ4. i. Οι F και G είναι παράγουσες της f στο (0,2) άρα υπάρχει $c\in R$ ώστε $F(x)=G(x)+c$. Για $x=x_1$: $F(x_1)=G(x_1)+c \overset{F(x_1)=0}{\Rightarrow} G(x_1)=-c$ (1) ενώ για $x=x_2$: $F(x_2)=G(x_2)+c \overset{G(x_2)=0}{\Rightarrow} F(x_2)=c\,(2)$. Από τις σχέσεις (1),(2) προκύπτει ότι:

$F(x_2)=-G(x_1)\Leftrightarrow F(x_2)+G(x_1)=0$.

ii. Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=x_1F(x)+x_2G(x)-x_1-x_2+2x$, $x\in(0,2)$ με

$$h(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)-x_1-x_2+2x_1=x_2G(x_1)+x_1-x_2$$

και

$$h(x_2)=x_1F(x_2)+x_2G(x_2)-x_1-x_2+2x_2=x_1F(x_2)+x_2-x_1 \overset{F(x_2)=-G(x_1)}{=} -x_1G(x_1)+x_2-x_1.$$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο (0,1] οπότε για $0<x<x_1 \Rightarrow f(x)<f(x_1)=0$ ενώ για $1\geq x>x_1 \Rightarrow f(x)>f(x_1)=0$. Επίσης η f είναι γνησίως φθίνουσα στο [1,2) οπότε για $1\leq x<x_2 \Rightarrow f(x)>f(x_2)=0$ ενώ για $2>x>x_2 \Rightarrow f(x)<f(x_2)=0$ οπότε ο πίνακας προσήμου της f άρα και της G΄ που είναι παράγουσα της f δίνεται δίπλα

x	0		x_1		x_2		2
$G'(x)=f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Η G είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_1,x_2]$ οπότε για $x_1<x_2 \overset{G:\uparrow}{\Leftrightarrow} G(x_1)<G(x_2)\Leftrightarrow G(x_1)<0$ οπότε $h(x_1)<0$ αφού $x_2G(x_1)<0$ και $x_1<x_2$ και $h(x_2)>0$ αφού $-x_1G(x_1)>0$ και $x_2>x_1$. Δεδομένου επίσης ότι η h είναι συνεχής στο $[x_1,x_2]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(x_1,x_2)$ ώστε $h(x_0)=0$. Η h είναι επίσης παραγωγίσιμη στο (x_1,x_2) με $h'(x)=x_1F'(x)+x_2G'(x)+2=x_1f(x)+x_2f(x)+2$. Από τον πίνακα προσήμου της f προκύπτει ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ άρα $h'(x)>0$ για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο (x_1,x_2) οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική.