ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2022

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α. Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x)=F(x)+c$, $c\in R$ είναι μία παράγουσα της f στο Δ αφού: $G'(x)=\left(F(x)+c\right)'=F'(x)=f(x)$ για κάθε $x\in\Delta$.

β. Έστω G είναι μία άλλη παράγουσα της f στο Δ. Τότε για κάθε $x\in\Delta$ ισχύουν $F'(x)=f(x)$, $G'(x)=f(x)$ οπότε $G'(x)=F'(x)$ και σύμφωνα με το θεώρημα των ίσων παραγώγων υπάρχει σταθερά c τέτοια ώστε $G(x)=F(x)+c$ για κάθε $x\in\Delta$.

Α2. Έστω μία συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό να δείξετε ότι $f'(x_0)=0$

Α3. Η ευθεία $x=x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f αν ένα τουλάχιστον από τα όρια: $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ είναι $+\infty$ ή $-\infty$

Α4. α. Σωστό β. Σωστό γ. Σωστό δ. Λάθος ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Πρέπει $x\in D_g \Rightarrow x\ge 0$ και $g(x)\in D_f \Rightarrow g(x)\le 1 \Rightarrow \sqrt{x}\le 1 \Rightarrow x\le 1$ άρα $D_{f\circ g}=[0,1]$ και $h(x)=\left(f\circ g\right)(x)=f(g(x))=\sqrt{x}^4-2\sqrt{x}^2+1=x^2-2x+1=(x-1)^2$.

Β2. Έστω $x_1,x_2\in[0,1]$ με

$$h(x_1)=h(x_2)\Leftrightarrow (x_1-1)^2=(x_2-1)^2\Leftrightarrow |x_1-1|=|x_2-1|\overset{0\le x\le 1}{\Leftrightarrow} -x_1+1=-x_2+1\Leftrightarrow x_1=x_2$$

άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέψιμη.

Θέτουμε $h(x)=y\Leftrightarrow (x-1)^2=y$ οπότε για $y\ge 0$:

$$|x-1|=\sqrt{y}\overset{0\le x\le 1}{\Leftrightarrow} -(x-1)=\sqrt{y}\Leftrightarrow -x+1=\sqrt{y}\Leftrightarrow x=1-\sqrt{y}.$$

Όμως πρέπει $0\le x\le 1\Leftrightarrow 0\le 1-\sqrt{y}\le 1\Leftrightarrow -1\le -\sqrt{y}\le 0\Leftrightarrow 1\ge\sqrt{y}\ge 0\Leftrightarrow 1\ge y\ge 0$ άρα

$$h^{-1}(x)=1-\sqrt{x},\ x\in[0,1]$$

Β3. i. Είναι

$$\phi(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x}}{1^2-\sqrt{x}^2}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1-\sqrt{x}}{\left(1-\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{x}\right)}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}, & x\in[0,1)\\ \dfrac{1}{2}, & x=1\end{cases}$$

με $\lim_{x\to 1}\phi(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\sqrt{x}}=\frac{1}{2}$ άρα η φ είναι συνεχής στο $x_0=1$. Επίσης η φ είναι συνεχής στο [0,1) ως πηλίκο συνεχών άρα η φ είναι συνεχής στο [0,1].

Επίσης $\phi(0)=\frac{1}{1+\sqrt{0}}=1\neq\phi(1)$ άρα η φ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών στο [0,1]

ii. Ησυνάρτηση $k(x)=\eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]$ άρα ισχύει ότι:

$$\frac{\pi}{6}<a<\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow \eta\mu\frac{\pi}{6}<\eta\mu a<\eta\mu\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}<\eta\mu a<1\Leftrightarrow\phi(1)<\eta\mu a<\phi(0)$$

άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ ώστε $\phi(x_0)=\eta\mu a$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για $x<-1$: $f'(x)=-2\Leftrightarrow f'(x)=(-2x)'$. Οι συναρτήσεις f(x) και -2x είναι συνεχής στο $(-\infty,-1]$ άρα σύμφωνα με το πόρισμα ίσων παραγώγων υπάρχει $c_1\in R$ ώστε $f(x)=-2x+c_1$. Για $x>-1$: $f'(x)=3x^2-1\Leftrightarrow f'(x)=(x^3-x)'$. Οι συναρτήσεις f(x) και x^3-x είναι συνεχής στο $[-1,+\infty)$ άρα σύμφωνα με το πόρισμα ίσων παραγώγων υπάρχει $c_2\in R$ ώστε $f(x)=x^3-x+c_2$. Επίσης $A_f=R$ άρα υπάρχει $c_3\in R$ ώστε $f(-1)=c_3$. Άρα:

$$f(x)=\begin{cases}-2x+c_1 &, x<-1\\ c_3 &, x=-1\\ x^3-x+c_2 &, x>-1\end{cases}$$

Η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων άρα $f(0)=0\Leftrightarrow 0^3-0+c_2=0\Leftrightarrow c_2=0$ άρα

$$f(x)=\begin{cases}-2x+c_1 &, x<-1\\ c_3 &, x=-1\\ x^3-x &, x>-1\end{cases}$$

Επίσης η f είναι συνεχής στο $x=-1$ από υπόθεση άρα

$$\lim_{x\to -1^{-1}}f(x)=\lim_{x\to -1^{-1}}f(x)=f(-1)\Leftrightarrow 2+c_1=0=c_3$$

Άρα $c_1=-2, c_3=0$ άρα $f(x)=\begin{cases}-2x-2 &, x<-1\\ 0 &, x=-1\\ x^3-x &, x>-1\end{cases}=\begin{cases}-2x-2 &, x\leq -1\\ x^3-x &, x>-1\end{cases}$

Γ2. Η fείναι παραγωγίσιμη στο $(-1,+\infty)$ με $f'(x_0)=3x^2-1$. Η εφαπτομένη της C_f στο Α είναι:

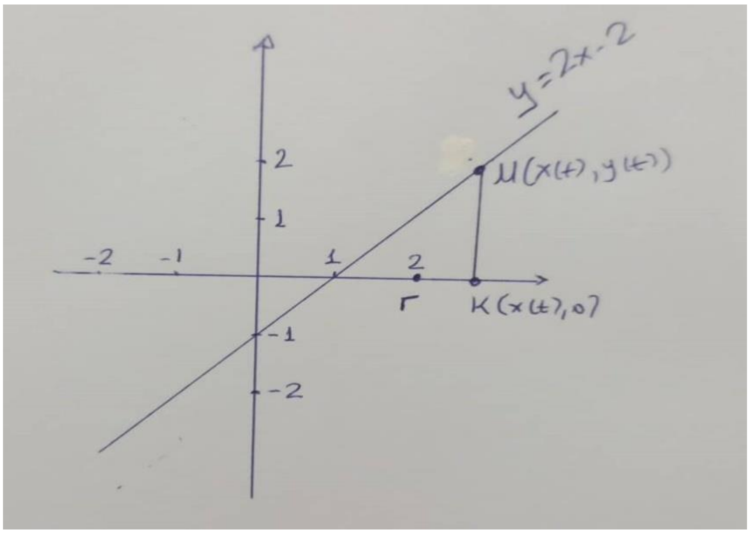
$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Rightarrow y-\left(x_0^3-x_0\right)=\left(3x_0^2-1\right)(x-x_0)$$

και διέρχεται από το σημείο (0,-2) άρα για $x=0$, $y=-2$ είναι:

$$-2-\left(x_0^3-x_0\right)=\left(3x_0^2-1\right)(-x_0)\Leftrightarrow -2-x_0^3+x_0=-3x_0^3+x_0\Leftrightarrow 2x_0^3=2\Leftrightarrow x_0^3=1\Leftrightarrow x_0=1$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης είναι $y-0=2(x-1)\Rightarrow y=2x-2$.

Γ3.



Έστω $M(x(t),y(t))$ με $y(t)=2x(t)-2$. Η προβολή του σημείο Μ στον x΄x είναι το σημείο $K(x(t),0)$ με $(\Gamma\mathrm{K})=x(t)-2$, $(MK)=y(t)$ Το εμβαδόν του τριγώνου είναι

$$E=\frac{(\Gamma\mathrm{K})\cdot(\mathrm{MK})}{2}=\frac{(x(t)-2)\cdot y(t)}{2}=\frac{(x(t)-2)\cdot 2(x(t)-1)}{2}=$$
$$=(x(t)-2)\cdot(x(t)-1)=x^2(t)-3x(t)+2$$

Τη χρονική στιγμή t_0 είναι $x(t_0)=3$ και ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ είναι 2 μ/sec άρα $x'(t_0)=2$. Ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι:

$$E'(t)=\left[x^2(t)-3x(t)+2\right]'=2x(t)x'(t)-3x'(t)$$

οπότε τη χρονική στιγμή t_0 είναι

$$E'(t_0)=2x(t_0)x'(t_0)-3x'(t_0)=2\cdot 3\cdot 2-3\cdot 2=6\ \tau.\mu/\sec .$$

Γ4. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x)=+\infty$. Θέτουμε $f(x)=u$ με

$\lim\limits_{x\to-\infty} u=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\eta\mu u}{u}$. Όμως $-1\le\eta\mu u\le 1\overset{:u>0}{\Leftrightarrow}-\dfrac{1}{u}\le\dfrac{\eta\mu u}{u}\le\dfrac{1}{u}$ και

επειδή $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u}=0$ άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\eta\mu u}{u}=0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\overset{-x=w}{=}\lim\limits_{w\to+\infty}\dfrac{f(w)}{1+w^3}=\lim\limits_{w\to+\infty}\dfrac{w^3-w}{1+w^3}=\lim\limits_{w\to+\infty}\dfrac{w^3}{w^3}=1$ άρα

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\frac{f(-x)}{1-x^3}\right]=0+1=1.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.i. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\left(x-\ln(3x)\right)'=1-\frac{1}{3x}\cdot(3x)'=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$$

με $f'(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{x-1}{x}=0\Leftrightarrow x=1$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\downarrow$		$\uparrow$

και παρουσιάζει στη θέση x=1 ολικό ελάχιστο με τιμή $f(1)=1-\ln 3$.

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln 3x)=+\infty$ διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln 3x \underset{u\to 0}{\overset{3x=u}{=}} \lim\limits_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln 3x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln e^x-\ln 3x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^x}{3x}$. Θεωρούμε $w=\dfrac{e^x}{3x}$ με

$\lim\limits_{x\to+\infty} w=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{3x}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(e^x)'}{(3x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{3}=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\dfrac{e^x}{3x}=\lim\limits_{w\to+\infty}\ln w=+\infty$

Επομένως $f\left((0,1]\right)\overset{f:\downarrow}{=}\left[f(1),\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\right)=[1-\ln 3,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι $0\in f\left((0,1]\right)$ διότι $1-\ln 3=\ln e-\ln 3<0$ αφού $e<3\Leftrightarrow \ln e<\ln 3$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_1\in(0,1)$ ώστε $f(x_1)=0$. Επίσης:

$f\left([1,+\infty)\right)\overset{f:\uparrow}{=}\left[f(1),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)=[1-\ln 3,+\infty)$. Παρατηρούμε ότι $0\in f\left([1,+\infty)\right)$ διότι

και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ άρα υπάρχει μοναδικό $x_2\in(1,+\infty)$ ώστε $f(x_2)=0$. Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει 2 ακριβώς ρίζες x_1,x_2 με $x_1<1<x_2$.

ii. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f''(x)=\left(1-\dfrac{1}{x}\right)'=\dfrac{1}{x^2}>0$ άρα η f είναι κυρτή.

Δ2. Για $x<x_1\overset{f:\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x_1)\Leftrightarrow f(x)>0$ ενώ $x_1<x<1\overset{f:\downarrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(x_1)\Leftrightarrow f(x)<0$

Για $1<x<x_2\overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)<f(x_2)\Leftrightarrow f(x)<0$ ενώ $x>x_2\overset{f:\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)>f(x_2)\Leftrightarrow f(x)>0$

Ο πίνακας προσήμων της f δίνεται δίπλα.

x	0		x_1		x_2		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Το ζητούμενο εμβαδόν $E=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx$

Όμως για κάθε $x\in(x_1,x_2)$ είναι $f(x)<0$ άρα

$$E=-\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx=-\int_{x_1}^{x_2}(x)'f(x)dx=-\left(\left[xf(x)\right]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}xf'(x)dx\right)=$$

$$=-\left(x_2f(x_2)-x_1f(x_1)-\int_{x_1}^{x_2}x\cdot\frac{x-1}{x}dx\right)\overset{f(x_1)=f(x_2)=0}{=}-\left(-\int_{x_1}^{x_2}x\cdot\frac{x-1}{x}dx\right)=\int_{x_1}^{x_2}(x-1)dx=$$

$$\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_{x_1}^{x_2}=\left(\frac{x_2^2}{2}-x_2\right)-\left(\frac{x_1^2}{2}-x_1\right)=\frac{1}{2}\left(x_2^2-2x_2\right)-\frac{1}{2}\left(x_1^2-2x_1\right)=\frac{1}{2}\left(x_2^2-2x_2-x_1^2+2x_1\right)$$

.

Παρατηρούμε επίσης ότι το ζητούμενο εμβαδόν είναι:

$$E=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)=\frac{1}{2}\left(x_1x_2+x_2^2-2x_2-x_1^2-x_1x_2+2x_1\right)=\frac{1}{2}\left(x_2^2-2x_2-x_1^2+2x_2\right)$$

Δ3. Είναι $0<x_1<1\overset{\cdot(-1)}{\Leftrightarrow}0>-x_1>-1\overset{+2}{\Leftrightarrow}2>2-x_1>1$. Ξέρουμε όμως ότι

$E>0\Leftrightarrow\dfrac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)>0$ και επειδή $x_2>x_1$ άρα πρέπει

$x_1+x_2-2>0\Leftrightarrow x_1+x_2>2\Leftrightarrow x_2>2-x_1$ άρα $x_2>2-x_1>1$ και επειδή $f(x)<0$ στο $(1,x_2)$ άρα $f(2-x_1)<0$.

Δ4. Η εξίσωση γίνεται: $2f(x)=1-\ln 3+f'(x_2)(x-x_2) \Leftrightarrow 2f(x)=f(1)+f'(x_2)(x-x_2)$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A\left(x_2, f(x_2)\right)$ είναι

$$y-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2) \overset{f(x_2)=0}{\Leftrightarrow} y=f'(x_2)(x-x_2)$$

Όμως η f κυρτή άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη άρα $f(x)\geq f'(x_2)(x-x_2)$ (1) με την ισότητα να ισχύει για $x=x_2$.

Επίσης η fπαρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=1$ άρα $f(x)\geq f(1)$ (2) με την ισότητα να ισχύει για $x=x_2$. Προσθέτωντας τις σχέσεις (1),(2) κατά μέλη:

$$2f(x)\geq f(1)+f'(x_2)(x-x_2)$$

και επειδή η ισότητα δεν ισχύει για την ίδια τιμή του x άρα

$$2f(x)> f(1)+f'(x_2)(x-x_2)$$

Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι αδύνατη.