

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**

**Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β')**  
**ΠΕΜΠΤΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2016 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
**ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ (ΝΕΟ ΣΥΣΤΗΜΑ) & ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ (ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ)**  
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  ορισμένη σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $x_0$  ένα εσωτερικό σημείο του  $\Delta$ . Αν η  $f$  παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο  $x_0$  και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να αποδείξετε ότι  $f'(x_0) = 0$ .

**Μονάδες 7**

**A2.** Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

**Μονάδες 4**

**A3.** Πότε λέμε ότι η ευθεία  $y = \ell$  είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ ;

**Μονάδες 4**

**A4.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α)**  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1.$

**β)** Αν  $f(x) = \ln|x|$  για κάθε  $x \neq 0$ , τότε  $f'(x) = \frac{1}{|x|}$  για κάθε  $x \neq 0$ .

**γ)** Αν μια συνάρτηση  $f$  δεν είναι συνεχής στο  $x_0$ , τότε η  $f$  δεν είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$ .

**δ)** Υπάρχει πολυωνυμική συνάρτηση βαθμού  $n \geq 2$ , η οποία έχει ασύμπτωτη.

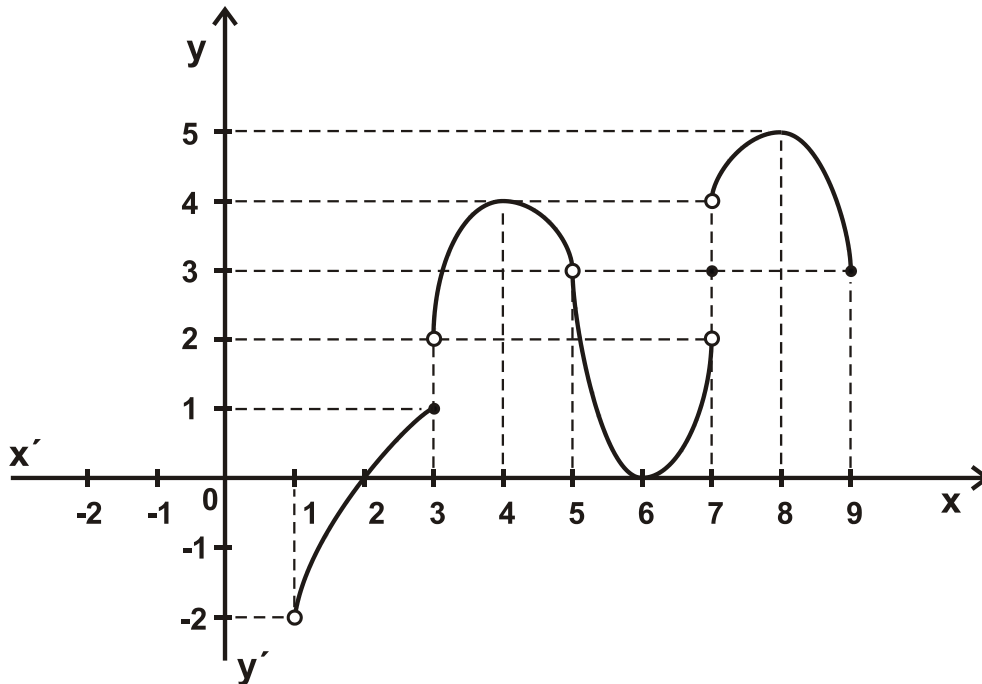
**ε)** Για κάθε συνάρτηση  $f$ , συνεχή στο  $[\alpha, \beta]$ , ισχύει:

$$\text{αν } \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0, \text{ τότε } f(x) > 0 \text{ στο } [\alpha, \beta].$$

**Μονάδες 10**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $f$ .



**B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της  $f$ .

**Μονάδες 2**

**B2.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α)  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$       β)  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$   
γ)  $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$       δ)  $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$       ε)  $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 7**

**B3.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια.

α)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$       β)  $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$       γ)  $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 9**

**B4.** Να βρείτε τα σημεία στα οποία η  $f$  δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 3**

**B5.** Να βρείτε τα σημεία  $x_0$  του πεδίου ορισμού της  $f$  για τα οποία ισχύει  $f'(x_0) = 0$ .

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

**Μονάδες 4**

### ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(x) = x^3$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  είναι συνάρτηση 1-1 (μονάδες 2) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση  $f^{-1}$  (μονάδες 4).

**Μονάδες 6**

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι για κάθε  $x > 0$  ισχύει:

$$f(\eta\mu x) > f\left(x - \frac{1}{6}x^3\right).$$

**Μονάδες 9**

**Γ3.** Ένα σημείο  $M$  κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $y = x^3$ ,  $x \geq 0$  με  $x = x(t)$  και  $y = y(t)$ . Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης  $y(t)$  του  $M$  είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης  $x(t)$ , αν υποθεθεί ότι  $x'(t) > 0$  για κάθε  $t \geq 0$ .

**Μονάδες 4**

**Γ4.** Αν  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και άρτια συνάρτηση, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 f(x) g(x) dx .$$

**Μονάδες 6**

### ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{x} + 1 & , 0 < x < 1 \\ 1 & , x = 1 \\ \frac{\ln x}{x-1} & , x > 1 \end{cases}$$

**Δ1.** Να δείξετε ότι η  $f$  είναι συνεχής στο  $(0, +\infty)$  (μονάδες 3) και να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της  $f$ . (μονάδες 2)

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι το  $x_0 = 1$  είναι το μοναδικό κρίσιμο σημείο της  $f$ .

**Μονάδες 8**

**Δ3. i)** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα στο  $(0, +\infty)$ .

(μονάδες 3)

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - ΝΕΟ & ΠΑΛΑΙΟ ΣΥΣΤΗΜΑ  
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

- ii) Αν  $E$  είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x = 1$  και  $x = x_0$ , όπου  $x_0$  η μοναδική ρίζα της εξίσωσης  $f(x) = 0$  στο  $(0, +\infty)$ , να αποδείξετε ότι

$$E = \frac{-x_0^2 - 2x_0 + 2}{2}.$$

(μονάδες 4)

**Μονάδες 7**

- Δ4.** Αν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $[1, +\infty)$  να αποδείξετε ότι  
 $(x + 1)F(x) > xF(1) + F(x^2)$ , για κάθε  $x > 1$ .

**Μονάδες 5**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)**

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**