ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΤΡΙΤΗ 8 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2020
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_o, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_o και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$.

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_o \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Κάθε συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

β) $\lim_{x\to-\infty} e^x = -\infty$

γ) Για κάθε συνάρτηση f, το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα της f, εφόσον υπάρχουν, είναι το ολικό μέγιστο της f.

δ) $(\ln|x|)' = -\frac{1}{x}$, για κάθε x<0.

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^2+\alpha$ και $g(x)=x+\beta$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $(f\circ g)(x)=x^2-2x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\beta=-1$.

Μονάδες 5

Β2. Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f, g είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτησή τους, εφόσον αυτή υπάρχει.

Μονάδες 6

Β3. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $g^{-1} \circ f$ και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $\varphi(x) = \sqrt{(g^{-1} \circ f)(x)}$.

Μονάδες 6

Β4. Έστω η συνάρτηση $h:[0,1] \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(x)+2 \leq h(x) \leq g(x)+2$, για κάθε $x \in [0,1]$.

i) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = 2$ (μονάδες 3).

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{h(x)+7}-3}{h^2(x)-4}$ (μονάδες 5).

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x^3$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι από το σημείο $N(-2, f(-2))$ διέρχονται δύο ακριβώς εφαπτομένες της γραφικής παράστασης της f και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

Μονάδες 8

Γ2. Έστω (ε): y=3x-2 η μία από τις δύο εφαπτομένες του ερωτήματος **Γ1**. Έστω ακόμα (ζ) ευθεία η οποία είναι παράλληλη στην (ε) και διέρχεται από το σημείο Μ(0,α) με -2<α<2. Να αποδείξετε ότι ανάμεσα στις ευθείες x=-1 και x=+1 υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής της (ζ) με τη γραφική παράσταση της f.

Μονάδες 9

Γ3. Ένα υλικό σημείο $M(x, x^3)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = x^3$ με ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του $x'(t) > 0$. Το σημείο Μ ξεκινά από το σημείο Ν(-2, -8) και καταλήγει στην αρχή των αξόνων Ο. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ είναι τριπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τετμημένης του;

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu^3x+f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu^2x\cdot\eta\mu x-1=0$, για κάθε $x\in(0,\frac{\pi}{2})$,
- $f(\frac{\pi}{3})=\frac{6+2\sqrt{3}}{3}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot\eta\mu x-\varepsilon\varphi x,\ \ x\in(0,\frac{\pi}{2})$ είναι σταθερή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{\eta\mu x}+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x},\ x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει μοναδικό ολικό ελάχιστο στο $x_0=\frac{\pi}{4}$, το οποίο και να βρείτε.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=3\sqrt{2}$ στο διάστημα $(0,\frac{\pi}{2})$ έχει ακριβώς δύο ρίζες ρ_1,ρ_2, με $\rho_1<\rho_2$.

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι $f'(\rho_2)(4\rho_2-\pi)>4\sqrt{2}$, όπου ρ_2 η ρίζα του ερωτήματος **Δ3**.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ