

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2008
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ 1ο

- A. Έστω μία συνεχής συνάρτηση s' ένα διάστημα $[α, β]$.
Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[α, β]$, τότε να
αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Μονάδες 10

- B. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του
Διαφορικού Λογισμού;

Μονάδες 5

- Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν,
γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που
αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η
πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι
λανθασμένη.

- α. Υπάρχουν συναρτήσεις που είναι 1-1, αλλά δεν
είναι γνησίως μονότονες.

Μονάδες 2

- β. Αν μια συνάρτηση f είναι κοίλη σ' ένα διάστημα Δ ,
τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f
σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται κάτω από τη
γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο
επαφής τους.

Μονάδες 2

- γ. Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ είναι ίσο με το άθροισμα
των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται πάνω από

ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

τον άξονα $x'x$ μείον το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων που βρίσκονται κάτω από τον άξονα $x'x$.

Μονάδες 2

δ. Αν a, β πραγματικοί αριθμοί, τότε:

$$a + \beta i = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ή } \beta = 0$$

Μονάδες 2

ε. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$ και l ένας πραγματικός αριθμός. Τότε ισχύει η ισοδυναμία:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - l) = 0$$

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται ότι ο μιγαδικός αριθμός $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $z^2 + \beta z + \gamma = 0$, όπου β και γ πραγματικοί αριθμοί.

α. Να αποδείξετε ότι $\beta = -1$ και $\gamma = 1$.

Μονάδες 9

β. Να αποδείξετε ότι $z_1^3 = -1$.

Μονάδες 8

γ. Να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού αριθμού w , για τον οποίο ισχύει:

$$|w| = |z_1 - \bar{z}_1|$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2 \ln x$, $x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

γ. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{f(x)} & , \quad x > 0 \\ k & , \quad x = 0 \end{cases}$$

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.

Μονάδες 6

ii. Αν $k = -\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, e)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $f(x) > 0$ για κάθε $x \geq 0$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad x \in [0, +\infty),$$

$$h(x) = \frac{F(x)}{\int_0^x t f(t) dt}, \quad x \in (0, +\infty).$$

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ

α. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 e^{t-1}[f(t) + F(t)]dt = F(1)$

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 8

γ. Αν $h(1)=2$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(t) dt < 2 \int_0^2 tf(t)dt$

Μονάδες 6

ii. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(t) dt = \frac{1}{2}F(1)$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.00' πρωινή.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΛΟΣ 4ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ