

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ  
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΛΙΟΥ 2007  
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ  
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ 1ο**

**A.1** Να αποδείξετε ότι αν μία συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 10**

**A.2** Τι σημαίνει γεωμετρικά το θεώρημα Rolle του Διαφορικού Λογισμού;

**Μονάδες 5**

**B.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

**α.** Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

**Μονάδες 2**

**β.** Αν  $f, g, g'$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα  $[\alpha, \beta]$ , τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \cdot \int_{\alpha}^{\beta} g'(x)dx.$$

**Μονάδες 2**

**γ.** Αν  $f$  είναι μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha$  είναι ένα σημείο του  $\Delta$ , τότε

$$\left( \int_{\alpha}^x f(t)dt \right)' = f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \Delta.$$

**Μονάδες 2**

- δ. Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα  $(\alpha, \beta)$ , τότε το σύνολο τιμών της στο διάστημα αυτό είναι το διάστημα  $(A, B)$  όπου  $A = \lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x)$  και  $B = \lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x)$ .

**Μονάδες 2**

- ε. Έστω δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σε ένα διάστημα  $\Delta$ . Αν οι  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $\Delta$  και  $f'(x) = g'(x)$  για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ , τότε ισχύει  $f(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in \Delta$ .

**Μονάδες 2**

### ΘΕΜΑ 2<sup>ο</sup>

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3x}{x}, & x < 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta \sigma\upsilon\nu x, & x \geq 0. \end{cases}$$

- α. Να αποδειχθεί ότι  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$ .

**Μονάδες 8**

- β. Αν  $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$  και η συνάρτηση  $f$  είναι συνεχής στο σημείο  $x_0 = 0$ , να αποδειχθεί ότι  $\alpha = \beta = 3$ .

**Μονάδες 9**

- γ. Αν  $\alpha = \beta = 3$ , να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα  $\int_0^{\pi} f(x) dx$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 3ο**

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = e^x - e \ln x, \quad x > 0.$$

- α. Να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση  $f(x)$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(1, +\infty)$ .

**Μονάδες 10**

- β. Να αποδειχθεί ότι ισχύει  $f(x) \geq e$  για κάθε  $x > 0$ .

**Μονάδες 7**

- γ. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση

$$\int_{x^2+1}^{x^2+2} f(t)dt = \int_{x^2+3}^{x^2+2} f(t)dt + \int_2^4 f(t)dt$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα  $(0, +\infty)$ .

**Μονάδες 8**

**ΘΕΜΑ 4ο**

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1 = \alpha + \beta i$  και  $z_2 = \frac{2 - \bar{z}_1}{2 + \bar{z}_1}$ , όπου

$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  με  $\beta \neq 0$ . Δίνεται επίσης ότι  $z_2 - z_1 \in \mathbb{R}$ .

- α. Να αποδειχθεί ότι  $z_2 - z_1 = 1$ .

**Μονάδες 9**

- β. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $z_1$  στο μιγαδικό επίπεδο.

**Μονάδες 6**

- γ. Αν ο αριθμός  $z_1^2$  είναι φανταστικός και  $\alpha\beta > 0$ , να υπολογισθεί ο  $z_1$  και να δειχθεί ότι

$$(z_1 + 1 + i)^{20} - (\bar{z}_1 + 1 - i)^{20} = 0.$$

**Μονάδες 10**

**ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους)**

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, κατεύθυνση, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων, αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Καμιά άλλη σημείωση δεν επιτρέπεται να γράψετε.**  
Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας σε όλα** τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: μετά τη 10.00΄ πρωινή.

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**