ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2020

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Προσανατολισμού (Παλαιό Σύστημα)

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Ευσταθίου Νικόλαος

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ 111
Α2. Θεωρία σελ 104
Α3. Θεωρία σελ 74
Α4. α. Ψ

β. Αν για $x<x_0$ ισχύει $f(x)<0$ ενώ για $x>x_0$ ισχύει $f(x)>0$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{f(x)}=-\infty$ ενώ το $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{f(x)}=+\infty$ άρα δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}$.

Α5. α. Σωστό β. Σωστό γ. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έστω $x_1,x_2\in D_f$ με $f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \dfrac{3x_1+1}{x_1-3}=\dfrac{3x_2+1}{x_2-3}\Leftrightarrow(3x_1+1)(x_2-3)=(3x_2+1)(x_1-3)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x_1x_2-9x_1+x_2-3=3x_1x_2-9x_2+x_1-3\Leftrightarrow 10x_2=10x_1\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέψιμη.

Β2. Θέτουμε $f(x)=y\Leftrightarrow\dfrac{3x+1}{x-3}=y\Leftrightarrow 3x+1=(x-3)y\Leftrightarrow 3x+1=xy-3y\Leftrightarrow 3y+1=xy-3x\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3y+1=x(y-3)$. Για $y\neq 3$: $x=\dfrac{3y+1}{y-3}$ άρα $D_{f^{-1}}=R-\{3\}$ και $f^{-1}(x)=\dfrac{3x+1}{x-3}$.

Άρα $D_f=D_{f^{-1}}$ και $f^{-1}(x)=f(x)$ για κάθε $x\in D_f$ άρα οι συναρτήσεις είναι ίσες.

Β3. Είναι $D_{f\circ f}=\{x\in D_f, f(x)\in D_f\}$ με $x\in D_f\Leftrightarrow x\neq 3$ και $f(x)\in D_f\Leftrightarrow f(x)\neq 3\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\dfrac{3x+1}{x-3}\neq 3\Leftrightarrow 3x+1\neq 3x-9\Leftrightarrow 1\neq -9$ το οποίο ισχύει για κάθε $x\in R$ άρα $D_{f\circ f}=R-\{3\}$

Για $x\neq 3$: $(f\circ f)(x)=f(f(x))=f(f^{-1}(x))=x$.

Β4. Είναι $\left|f(x)\eta\mu\dfrac{1}{3x+1}\right|\leq|f(x)|\Leftrightarrow -|f(x)|\leq f(x)\eta\mu\dfrac{1}{3x+1}\leq|f(x)|$. Όμως

$\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{3x+1}{x-3}=\dfrac{0}{-\frac{10}{3}}=0$ άρα σύμφωνα με το Κ.Π: $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\left[f(x)\eta\mu\dfrac{1}{3x+1}\right]=0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $\eta\mu\theta=\frac{\text{ΒΜ}}{\text{ΟΒ}}\Leftrightarrow \eta\mu\theta=\frac{\text{ΒΓ}}{2}\Leftrightarrow \text{ΒΓ}=2\eta\mu\theta$ και $\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{\text{ΟΜ}}{\text{ΟΒ}}\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta=\text{ΟΜ}$.

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $\text{Ε}(\theta)=\frac{1}{2}\text{ΒΓ}\cdot\text{ΑΜ}=\frac{1}{2}\cdot 2\eta\mu\theta\cdot(\text{ΑΟ}+\text{ΟΜ})=\eta\mu\theta\cdot(\sigma\upsilon\nu\theta+1)$ και $0<\theta<\pi$ ως γωνία τριγώνου.

Γ2. Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη στο (0,π) με

$$\text{Ε}'(\theta)=(\eta\mu\theta)'\cdot(\sigma\upsilon\nu\theta+1)+\eta\mu\theta(\sigma\upsilon\nu\theta+1)'=\sigma\upsilon\nu\theta\cdot(\sigma\upsilon\nu\theta+1)+\eta\mu\theta\cdot(-\eta\mu\theta)=$$

$$=\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-\eta\mu^2\theta=\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-(1-\sigma\upsilon\nu^2\theta)=2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1=2\left(\sigma\upsilon\nu\theta-\frac{1}{2}\right)(\sigma\upsilon\nu\theta+1).$$

Όμως $\theta\neq\pi$ άρα $\sigma\upsilon\nu\theta>-1\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta+1>0$ οπότε $E'(\theta)=0\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{1}{2}$ και επειδή $\theta\in(0,\pi)$ άρα $\theta=\frac{\pi}{3}$. Η Ε΄ είναι συνεχής στα διαστήματα $\left(0,\frac{\pi}{3}\right),\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ και δεν μηδενίζεται στα διαστήματα αυτά άρα διατηρεί πρόσημο.

Επίσης $E'\left(\frac{\pi}{6}\right)=2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)>0$ και $E'\left(\frac{\pi}{2}\right)=-1<0$ άρα αν $\theta\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ τότε $E'(\theta)>0$ ενώ αν $\theta\in\left(\frac{\pi}{3},\pi\right)$ τότε $E'(\theta)<0$. Επομένως η Ε είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)$ και παρουσιάζει στη θέση $\theta=\frac{\pi}{3}$ μέγιστο.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $E(\theta)=\frac{3}{4}$ έχει ακριβώς 2 λύσεις. Είναι

$$E\left(\left(0,\frac{\pi}{3}\right]\right)\overset{E:\uparrow}{=}\left(\lim_{\theta\to 0^+}E(\theta),\theta\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right] \text{ και } E\left(\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)\right)\overset{E:\downarrow}{=}\left(\lim_{\theta\to\pi^-}E(\theta),\theta\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left(0,\frac{3\sqrt{3}}{4}\right]$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{3}{4}\in E\left(\left(0,\frac{\pi}{3}\right]\right)$ και επειδή η Ε είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$, υπάρχει μοναδικό $\theta_1\in\left(0,\frac{\pi}{3}\right]$: $E(\theta_1)=\frac{3}{4}$. Ομοίως $\frac{3}{4}\in E\left(\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)\right)$ και επειδή η Ε είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)$ άρα υπάρχει μοναδικό $\theta_2\in\left[\frac{\pi}{3},\pi\right)$: $E(\theta_2)=\frac{3}{4}$.

Γ4. Η Ε είναι συνεχής στο $\left[\theta_1,\frac{\pi}{3}\right]$ ως πράξη συνεχών και παραγωγίσιμη στο $\left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right)$ με $\text{Ε}'(\theta)=2\sigma\upsilon\nu^2\theta+\sigma\upsilon\nu\theta-1$ άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi_1\in\left(\theta_1,\frac{\pi}{3}\right):\ E'(\xi_1)=\frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right)-E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3}-\theta_1}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}}{\frac{\pi}{3}-\theta_1} \text{ άρα } \frac{3\sqrt{3}}{4}-\frac{3}{4}=E'(\xi_1)\left(\frac{\pi}{3}-\theta_1\right)\ (1).$$

Ομοίως η Ε είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{3},\theta_2\right]$ ως πράξη συνεχών και παραγωγίσιμη στο

$\left(\dfrac{\pi}{3},\theta_2\right)$ άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2\in\left(\dfrac{\pi}{3},\theta_2\right)$:

$E'(\xi_2)=\dfrac{E(\theta_2)-E\left(\dfrac{\pi}{3}\right)}{\theta_2-\dfrac{\pi}{3}}=\dfrac{\dfrac{3}{4}-\dfrac{3\sqrt{3}}{4}}{\theta_2-\dfrac{\pi}{3}}$ άρα $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}-\dfrac{3}{4}=E'(\xi_2)\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta_2\right)$ (2). Από (1),(2):

$E'(\xi_1)\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta_1\right)=E'(\xi_2)\left(\dfrac{\pi}{3}-\theta_2\right)$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\lambda x}(\lambda x)'=$

$=\ln x+1-\dfrac{1}{x}$ και $f''(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}>0$ άρα η f ΄ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Όμως $f'(1)=0$ άρα για $0<x<1\overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(1)\Leftrightarrow f'(x)<0$ και για

$x>1\overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(1)\Leftrightarrow f'(x)>0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο (0,1], γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και έχει στη θέση $x=1$ ελάχιστο (ολικό) με τιμή $f(1)=-\ln\lambda$. Το σημείο είναι το $A(1,-\ln\lambda)$ και επειδή $\lambda\in(0,+\infty)$ άρα το σημείο κινείται πάνω στην ευθεία $x=1$.

Δ2. Για κάθε $x>0$, $\lambda>0$ η ανισότητα γίνεται:

$$x^x\ge\lambda x\Leftrightarrow \ln x^x\ge\ln\lambda x\Leftrightarrow x\ln x\ge\ln(\lambda x)\Leftrightarrow x\ln x-\ln(\lambda x)\ge 0\Leftrightarrow f(x)\ge 0$$

Ξέρουμε ότι η f έχει στη θέση $x=1$ ελάχιστο (ολικό) με τιμή $f(1)=-\ln\lambda$ άρα πρέπει $-\ln\lambda\ge 0\Leftrightarrow\ln\lambda\le 0\Leftrightarrow\ln\lambda\le\ln 1\Leftrightarrow\lambda\le 1$ άρα η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το λ είναι $\lambda=1$.

Δ3. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x)=\left(x^x\right)'=\left(e^{\ln x^x}\right)'=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}(x\ln x)'=g(x)(\ln x+1)$$

Έστω $M(x_0,g(x_0))$ το σημείο επαφής. Η εφαπτομένη της C_g στο Μ είναι

$$y-g(x_0)=g'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y-g(x_0)=g(x_0)(\ln x_0+1)(x-x_0)$$

Για $x=y=0$: $-g(x_0)=g(x_0)(\ln x_0+1)(-x_0)\overset{g(x)>0}{\Leftrightarrow}-1=-x_0(\ln x_0+1)\Leftrightarrow x_0\ln x_0+x_0-1=0\overset{:x_0>0}{\Leftrightarrow}$

$\ln x_0+1-\dfrac{1}{x_0}=0\Leftrightarrow f'(x_0)=0\Leftrightarrow f'(x_0)=f'(1)\overset{f':1-1}{\Leftrightarrow}x_0=1$. Η εφαπτομένη της C_g στο 1 είναι $y-g(1)=g(1)(\ln 1+1)(x-1)\Leftrightarrow y-1=x-1\Leftrightarrow y=x$.

Δ4.i. Είναι $h(x)=\begin{cases}e^{x\ln x}, x>0\\ 1\ \ , x=0\end{cases}$. Η h είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων. Επίσης $h(0)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}e^{x\ln x}$. Θέτουμε $x\ln x=u$ με

$\lim\limits_{x\to 0^+} u = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(x\ln x\right) = \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{D.L.H}{\overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^+}(-x) = 0$ άρα $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1$

και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} h(x) = h(0)$ άρα η h είναι συνεχής στο 0 άρα και στο $[0,+\infty)$

ii. Θεωρούμε $\phi(x) = x^{2020}\left(3-2\int_1^2 g(t)dt\right)+(1-x)\int_0^1 h(1-t)dt$, $D_\phi = R$ με

$\phi(0) = \int_0^1 h(1-t)dt$ και $\phi(1) = 3-2\int_1^2 g(t)dt$

Η g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x) = x^x(\ln x+1)$ και

$g''(x) = \left(x^x\right)'(\ln x+1)+x^x(\ln x+1)' = x^x(\ln x+1)(\ln x+1)+x^x\cdot\dfrac{1}{x} = x^x(\ln x+1)^2+x^x\cdot\dfrac{1}{x} > 0$

άρα η g είναι κυρτή οπότε η C_g βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη $y = x$ εκτός από

το σημείο επαφής άρα $g(t) > t$ άρα $\int_1^2 g(t)dt > \int_1^2 tdt \Rightarrow \int_1^2 g(t)dt > \left[\dfrac{t^2}{2}\right]_1^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \int_1^2 g(t)dt > \dfrac{3}{2} \overset{\cdot(-2)}{\Rightarrow} -2\int_1^2 g(t)dt < -3 \overset{+3}{\Rightarrow} 3-2\int_1^2 g(t)dt < 0 \Leftrightarrow \phi(1) < 0$. Επίσης

θέτουμε $1-t = u \Leftrightarrow t = -u$ με $dt = -du$. Αν $t = 0 \Leftrightarrow u = 1$ ενώ αν $t = 0 \Leftrightarrow u = 0$

οπότε $\phi(0) = \int_1^0 h(u)(-du) = \int_0^1 h(u)du = \int_0^1 h(x)dx$.

Όμως για κάθε $x\in[0,1]$ είναι $h(x) > 0$ άρα $\int_0^1 h(x)dx > 0 \Leftrightarrow \phi(0) > 0$.

Η φ είναι συνεχής στο [0,1] ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και
$\phi(0)\phi(1) < 0$ άρα σύμφωνα με το Θ.Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,1)$ ώστε
$\phi(x_0) = 0$.