

ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά Προσανατολισμού (Παλαιό Σύστημα)

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: Ευσταθίου Νικόλαος

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σελ 111

A2. Θεωρία σελ 104

A3. Θεωρία σελ 74

A4. α. Ψ

β. Αν για $x < x_0$ ισχύει $f(x) < 0$ ενώ για $x > x_0$ ισχύει $f(x) > 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$ ενώ

το $\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{1}{f(x)} = +\infty$ άρα δεν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)}$.

A5. α. Σωστό

β. Σωστό

γ. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

B1. Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{3x_1+1}{x_1-3} = \frac{3x_2+1}{x_2-3} \Leftrightarrow (3x_1+1)(x_2-3) = (3x_2+1)(x_1-3) \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3x_1x_2 - 9x_1 + x_2 - 3 = 3x_1x_2 - 9x_2 + x_1 - 3 \Leftrightarrow 10x_2 = 10x_1 \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα η f είναι 1-1 και
 αντιστρέψιμη.

B2. Θέτουμε $f(x) = y \Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-3} = y \Leftrightarrow 3x+1 = (x-3)y \Leftrightarrow 3x+1 = xy-3y \Leftrightarrow 3y+1 = xy-3x \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow 3y+1 = x(y-3)$. Για $y \neq 3$: $x = \frac{3y+1}{y-3}$ άρα $D_{f^{-1}} = R - \{3\}$ και $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{x-3}$.

Άρα $D_f = D_{f^{-1}}$ και $f^{-1}(x) = f(x)$ για κάθε $x \in D_f$ άρα οι συναρτήσεις είναι ίσες.

B3. Είναι $D_{f \circ f} = \{x \in D_f, f(x) \in D_f\}$ με $x \in D_f \Leftrightarrow x \neq 3$ και $f(x) \in D_f \Leftrightarrow f(x) \neq 3 \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow \frac{3x+1}{x-3} \neq 3 \Leftrightarrow 3x+1 \neq 3x-9 \Leftrightarrow 1 \neq -9$ το οποίο ισχύει για κάθε $x \in R$ άρα $D_{f \circ f} = R - \{3\}$

Για $x \neq 3$: $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$.

B4. Είναι $\left| f(x) \eta \mu \frac{1}{3x+1} \right| \leq |f(x)| \Leftrightarrow -|f(x)| \leq f(x) \eta \mu \frac{1}{3x+1} \leq |f(x)|$. Όμως

$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{3x+1}{x-3} = \frac{0}{-\frac{10}{3}} = 0$ άρα σύμφωνα με το Κ.Π: $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \left[f(x) \eta \mu \frac{1}{3x+1} \right] = 0$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Είναι $\eta\mu\theta = \frac{BM}{OB} \Leftrightarrow \eta\mu\theta = \frac{B\Gamma}{2} \Leftrightarrow B\Gamma = 2\eta\mu\theta$ και $\sigma\upsilon\nu\theta = \frac{OM}{OB} \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = OM$.

Το εμβαδόν του τριγώνου είναι $E(\theta) = \frac{1}{2}B\Gamma \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot 2\eta\mu\theta \cdot (AO + OM) = \eta\mu\theta \cdot (\sigma\upsilon\nu\theta + 1)$
και $0 < \theta < \pi$ ως γωνία τριγώνου.

Γ2. Η συνάρτηση E είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi)$ με

$$E'(\theta) = (\eta\mu\theta)' \cdot (\sigma\upsilon\nu\theta + 1) + \eta\mu\theta(\sigma\upsilon\nu\theta + 1)' = \sigma\upsilon\nu\theta \cdot (\sigma\upsilon\nu\theta + 1) + \eta\mu\theta \cdot (-\eta\mu\theta) =$$

$$= \sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - \eta\mu^2\theta = \sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - (1 - \sigma\upsilon\nu^2\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1 = 2\left(\sigma\upsilon\nu\theta - \frac{1}{2}\right)(\sigma\upsilon\nu\theta + 1).$$

Όμως $\theta \neq \pi$ άρα $\sigma\upsilon\nu\theta > -1 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta + 1 > 0$ οπότε $E'(\theta) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{2}$ και επειδή

$\theta \in (0, \pi)$ άρα $\theta = \frac{\pi}{3}$. Η E' είναι συνεχής στα διαστήματα $\left(0, \frac{\pi}{3}\right), \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ και δεν

μηδενίζεται στα διαστήματα αυτά άρα διατηρεί πρόσημο.

Επίσης $E'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) > 0$ και $E'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$ άρα αν $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right)$ τότε $E'(\theta) > 0$

ενώ αν $\theta \in \left(\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ τότε $E'(\theta) < 0$. Επομένως η E είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$,
γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ και παρουσιάζει στη θέση $\theta = \frac{\pi}{3}$ μέγιστο.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $E(\theta) = \frac{3}{4}$ έχει ακριβώς 2 λύσεις. Είναι

$$E\left(\left(0, \frac{\pi}{3}\right)\right)^{E:\uparrow} = \left(\lim_{\theta \rightarrow 0^+} E(\theta), \theta\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right) \text{ και } E\left(\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)\right)^{E:\downarrow} = \left(\lim_{\theta \rightarrow \pi^-} E(\theta), \theta\left(\frac{\pi}{3}\right)\right) = \left(0, \frac{3\sqrt{3}}{4}\right)$$

Παρατηρούμε ότι $\frac{3}{4} \in E\left(\left(0, \frac{\pi}{3}\right)\right)$ και επειδή η E είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0, \frac{\pi}{3}\right)$,

υπάρχει μοναδικό $\theta_1 \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) : E(\theta_1) = \frac{3}{4}$. Ομοίως $\frac{3}{4} \in E\left(\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)\right)$ και επειδή η E είναι

γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right)$ άρα υπάρχει μοναδικό $\theta_2 \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right) : E(\theta_2) = \frac{3}{4}$.

Γ4. Η E είναι συνεχής στο $\left[\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$ ως πράξη συνεχών και παραγωγίσιμη στο $\left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right)$

με $E'(\theta) = 2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1$ άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον

$$\xi_1 \in \left(\theta_1, \frac{\pi}{3}\right) : E'(\xi_1) = \frac{E\left(\frac{\pi}{3}\right) - E(\theta_1)}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4}}{\frac{\pi}{3} - \theta_1} \text{ άρα } \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} = E'(\xi_1)\left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) \quad (1).$$

Ομοίως η E είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$ ως πράξη συνεχών και παραγωγίσιμη στο

$\left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$ άρα σύμφωνα με το Θ.Μ.Τ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in \left(\frac{\pi}{3}, \theta_2\right)$:

$$E'(\xi_2) = \frac{E(\theta_2) - E\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{3}{4} - \frac{3\sqrt{3}}{4}}{\theta_2 - \frac{\pi}{3}} \quad \text{άρα} \quad \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{3}{4} = E'(\xi_2) \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right) \quad (2). \text{ Από (1),(2):}$$

$$E'(\xi_1) \left(\frac{\pi}{3} - \theta_1\right) = E'(\xi_2) \left(\frac{\pi}{3} - \theta_2\right).$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{\lambda x} (\lambda x)' = \ln x + 1 - \frac{1}{x}$ και $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Όμως $f'(1) = 0$ άρα για $0 < x < 1 \stackrel{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ και για

$x > 1 \stackrel{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$, γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και έχει στη θέση $x=1$ ελάχιστο (ολικό) με τιμή $f(1) = -\ln \lambda$.

Το σημείο είναι το $A(1, -\ln \lambda)$ και επειδή $\lambda \in (0, +\infty)$ άρα το σημείο κινείται πάνω στην ευθεία $x=1$.

Δ2. Για κάθε $x > 0, \lambda > 0$ η ανισότητα γίνεται:

$$x^x \geq \lambda x \Leftrightarrow \ln x^x \geq \ln \lambda x \Leftrightarrow x \ln x \geq \ln(\lambda x) \Leftrightarrow x \ln x - \ln(\lambda x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq 0$$

Ξέρουμε ότι η f έχει στη θέση $x=1$ ελάχιστο (ολικό) με τιμή $f(1) = -\ln \lambda$ άρα πρέπει $-\ln \lambda \geq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \leq 0 \Leftrightarrow \ln \lambda \leq \ln 1 \Leftrightarrow \lambda \leq 1$ άρα η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το λ είναι $\lambda=1$.

Δ3. Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$g'(x) = (x^x)' = (e^{\ln x^x})' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = g(x)(\ln x + 1)$$

Έστω $M(x_0, g(x_0))$ το σημείο επαφής. Η εφαπτομένη της C_g στο M είναι

$$y - g(x_0) = g'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - g(x_0) = g(x_0)(\ln x_0 + 1)(x - x_0)$$

Για $x = y = 0$: $-g(x_0) = g(x_0)(\ln x_0 + 1)(-x_0) \stackrel{g(x)>0}{\Leftrightarrow} -1 = -x_0(\ln x_0 + 1) \Leftrightarrow x_0 \ln x_0 + x_0 - 1 = 0 \stackrel{x_0>0}{\Leftrightarrow}$

$\ln x_0 + 1 - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow f'(x_0) = f'(1) \stackrel{f':\downarrow}{\Leftrightarrow} x_0 = 1$. Η εφαπτομένη της C_g στο 1

είναι $y - g(1) = g(1)(\ln 1 + 1)(x - 1) \Leftrightarrow y - 1 = x - 1 \Leftrightarrow y = x$.

Δ4.i. Είναι $h(x) = \begin{cases} e^{x \ln x}, & x > 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$. Η h είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών

συναρτήσεων. Επίσης $h(0) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x}$. Θέτουμε $x \ln x = u$ με

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} u = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0 \text{ \u03b1\u03c1\u03b1 } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x} = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1$$

και επειδι $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = h(0)$ \u03b1\u03c1\u03b1 \u03b7 \u03b7 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c3\u03c5\u03bd\u03b5\u03c7\u03b7\u03c3 \u03c3\u03c4\u03bf 0 \u03b1\u03c1\u03b1 \u03ba\u03b9 \u03c3\u03c4\u03bf $[0, +\infty)$

ii. \u0398\u03b5\u03c9\u03c1\u03bf\u03c5\u03bc\u03b5 $\phi(x) = x^{2020} \left(3 - 2 \int_1^2 g(t) dt \right) + (1-x) \int_0^1 h(1-t) dt$, $D_\phi = \mathbb{R}$ \u03bc\u03b5

$$\phi(0) = \int_0^1 h(1-t) dt \text{ \u03ba\u03b9 } \phi(1) = 3 - 2 \int_1^2 g(t) dt$$

\u0397 \u03b3 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03b4\u03c5\u03bf \u03c6\u03bf\u03c1\u03b5\u03c3 \u03c0\u03b1\u03c1\u03b1\u03b3\u03c9\u03b3\u03b9\u03c3\u03b9\u03bc\u03b7 \u03c3\u03c4\u03bf $(0, +\infty)$ \u03bc\u03b5 $g'(x) = x^x (\ln x + 1)$ \u03ba\u03b9

$$g''(x) = (x^x)' (\ln x + 1) + x^x (\ln x + 1)' = x^x (\ln x + 1) (\ln x + 1) + x^x \cdot \frac{1}{x} = x^x (\ln x + 1)^2 + x^x \cdot \frac{1}{x} > 0$$

\u03b1\u03c1\u03b1 \u03b7 \u03b3 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03ba\u03c5\u03c1\u03c4\u03b7 \u03c9\u03c0\u03c4\u03bf\u03c4\u03b5 \u03b7 C_g \u03b2\u03c1\u03b9\u03c3\u03ba\u03b5\u03c4\u03b1\u03b9 \u03c0\u03b1\u03bd\u03c9 \u03c0\u03ac\u03c1\u03bf \u03c4\u03b7\u03bd \u03b5\u03c6\u03b1\u03c0\u03c4\u03bf\u03bc\u03b5\u03bd\u03b7 $y = x$ \u03b5\u03ba\u03c4\u03bf\u03c3 \u03b1\u03c0\u03cc

\u03c4\u03bf \u03c3\u03b7\u03bc\u03b5\u03b9\u03bf \u03b5\u03c0\u03b1\u03c6\u03b7\u03c3 \u03b1\u03c1\u03b1 $g(t) > t$ \u03b1\u03c1\u03b1 $\int_1^2 g(t) dt > \int_1^2 t dt \Rightarrow \int_1^2 g(t) dt > \left[\frac{t^2}{2} \right]_1^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_1^2 g(t) dt > \frac{3}{2} \Rightarrow -2 \int_1^2 g(t) dt < -3 \Rightarrow 3 - 2 \int_1^2 g(t) dt < 0 \Leftrightarrow \phi(1) < 0. \text{ \u0395\u03c0\u03b9\u03c3\u03b7\u03c3}$$

\u03b8\u03b5\u03c4\u03bf\u03bc\u03b5 $1-t = u \Leftrightarrow t = -u$ \u03bc\u03b5 $dt = -du$. \u0391\u03bd $t=0 \Leftrightarrow u=1$ \u03b5\u03bd\u03c9 \u03b1\u03bd $t=1 \Leftrightarrow u=0$

$$\u03c9\u03c0\u03c4\u03bf\u03c4\u03b5 $\phi(0) = \int_1^0 h(u) (-du) = \int_0^1 h(u) du = \int_0^1 h(x) dx$.$$

\u038c\u03bc\u03c9\u03c3 \u03b3\u03b9\u03b1 \u03ba\u03ac\u03b8\u03b5 $x \in [0, 1]$ \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 $h(x) > 0$ \u03b1\u03c1\u03b1 $\int_0^1 h(x) dx > 0 \Leftrightarrow \phi(0) > 0$.

\u0397 \u03c6 \u03b5\u03b9\u03bd\u03b1 \u03c3\u03c5\u03bd\u03b5\u03c7\u03b7\u03c3 \u03c3\u03c4\u03bf $[0, 1]$ \u03c9\u03c3 \u03c0\u03c1\u03ac\u03be\u03b9\u03c3 \u03c3\u03c5\u03bd\u03b5\u03c7\u03c9\u03bd \u03c3\u03c5\u03bd\u03b1\u03c1\u03c4\u03b7\u03c3\u03b5\u03c9\u03bd \u03ba\u03b9

$\phi(0)\phi(1) < 0$ \u03b1\u03c1\u03b1 \u03c3\u03c5\u03bc\u03c6\u03c9\u03bd\u03b1 \u03bc\u03b5 \u03c4\u03bf \u0398. Bolzano \u03c5\u03c0\u03ac\u03c1\u03c7\u03b5\u03b9 \u03b5\u03bd\u03b1 \u03c4\u03bf\u03bb\u03ac\u03c7\u03b9\u03c3\u03c4\u03bf\u03bd $x_0 \in (0, 1)$ \u03c9\u03c3\u03c4\u03b5 $\phi(x_0) = 0$.