ΠΡΩΤΟ φροντιστήριο

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2016

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α.1. απόδειξη **Α.2.** ορισμός **Α.3.** ορισμός **Α.4.** **Λ / Σ / Λ / Σ / Σ**

ΘΕΜΑ Β

Β.1.

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1},\ \ x\in R$$

$$f'(x)=\frac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}\ \text{ με }\ f'(x)=0\Leftrightarrow x=0$$

x		0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	min $(0,0)$	$\nearrow$

Β.2.

$$f''(x)=\frac{2(1-3x^2)}{\left(x^2+1\right)^3}\ \text{ με }\ f''(x)=0\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

x		$-\frac{\sqrt{3}}{3}$		$\frac{\sqrt{3}}{3}$	
$f''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		ΣΚ		ΣΚ	

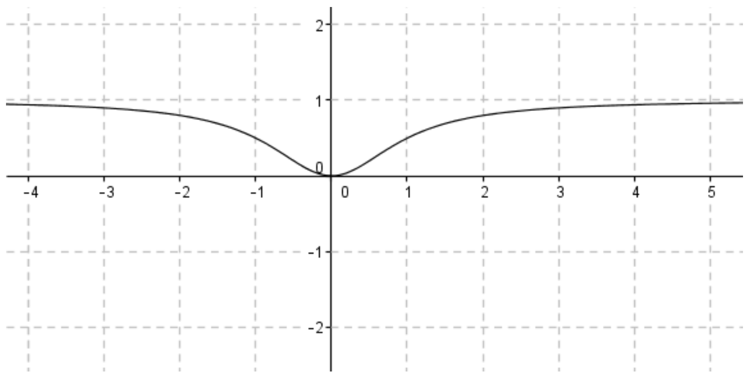
$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{3},f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right)$$

Β.3.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

άρα $\boldsymbol{y=1}$ Ο.Α. στο $+\infty$ (ομοίως και στο $-\infty$)

Β.4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ.1.

Η εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$ έχει προφανή λύση το $\boldsymbol{x=0}$ οπότε αρκεί νδο αυτή είναι μοναδική.

Από τη βασική ανίσωση

$$x-1\geq \ln x,\ \ x>0\ \ \textbf{(*)}$$

προκύπτει ότι

$$e^{x^2}-1\geq \ln e^{x^2}\ \text{ δηλαδή }\ e^{x^2}-1\geq x^2\ln e\ \text{ δηλαδή }\ e^{x^2}-1\geq x^2\ \text{ άρα }\ e^{x^2}-x^2-1\geq 0$$

Απόδειξη της (*)

Θέτω $K(x)=x-1-\ln x,\ \ x>0$

$K'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

$K'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

x	0		1	
$K'(x)$		$-$	0	$+$
$K(x)$		$\searrow$	min $(1,K(1))$	$\nearrow$

Οπότε από τον ορισμό ελαχίστου προκύπτει

$$K(x)\geq K(1) \Leftrightarrow K(x)\geq 0 \Leftrightarrow \ x-1-\ln x\geq 0$$

Γ.2.

$f^2(x)=(e^{x^2}-x^2-1)^2$ με $e^{x^2}-x^2-1\geq 0$ για κάθε $x\in R$

Οπότε

$$f(x)=e^{x^2}-x^2-1 \quad ή \quad f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$$

και $f(0)=0$

Η f είναι συνεχής στο R και δεν μηδενίζεται σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ άρα διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$

Οπότε

- Αν $x>0$ και $f(x)>0$ τότε $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$
- Αν $x>0$ και $f(x)<0$ τότε $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$
- Αν $x<0$ και $f(x)>0$ τότε $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$
- Αν $x<0$ και $f(x)<0$ τότε $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)$

Συνεπώς οι ζητούμενες συνεχείς συναρτήσεις είναι

- $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in R$
- $f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right),\ x\in R$
- $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x\geq 0 \\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x<0 \end{cases}$
- $f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1, & x<0 \\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right), & x\geq 0 \end{cases}$

Γ.3.

$f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in R$

$f'(x)=2x\left(e^{x^2}-1\right)$

$f''(x)=4x^2e^{x^2}+2\left(e^{x^2}-1\right)\geq 0$ διότι $x^2\geq 0\Rightarrow e^{x^2}\geq 1\Rightarrow e^{x^2}-1\geq 0$

και f'' συνεχής στο 0

άρα

f κυρτή στο R

Γ.4.

$f\left(|\eta\mu x|+3\right)-f\left(|\eta\mu x|\right)=f(x+3)-f(x),\ x\geq 0$ **(1)**

Θέτω $h(x)=f(x+3)-f(x)$ με $h'(x)=f'(x+3)-f'(x)>0$ άρα h γνης.αύξουσα άρα 1-1

Διότι

$x<x+3\overset{f'\uparrow}{\Rightarrow} f'(x)<f'(x+3)\Rightarrow f'(x+3)-f'(x)>0$

άρα η **(1)** δίνει

$$h\left(|\eta\mu x|\right)=h(x)$$

$$|\eta\mu x|=x$$

$$x=0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1.

- $\int_0^{\pi}(f(x)+f''(x))\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\pi \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx+\underbrace{\cancel{\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^{\pi}}}_{0}-\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\pi \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx-\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\pi \Leftrightarrow$

$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx-\left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow -\left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=\pi \Leftrightarrow$

$-f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi+f(0)\sigma\upsilon\nu 0=\pi \Leftrightarrow -f(\pi)(-1)+\underbrace{\cancel{f(0)}}_{0}=\pi \Leftrightarrow f(\pi)=\pi$

Αιτιολόγηση

Θέτω $K(x)=\dfrac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow f(x)=\eta\mu x\cdot K(x)$ με $\lim\limits_{x\to 0}K(x)=1$

Η f είναι συνεχής στο 0 άρα $f(0)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left(K(x)\eta\mu x\right)=1\cdot 0=0$

- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{K(x)\cdot\eta\mu x}{x}=1\cdot 1=1$ άρα $f'(0)=1$

Δ.2.

Είναι $e^{f(x)}+x=f(f(x))+e^x$ οπότε

$$\left(e^{f(x)}+x\right)'=\left(f(f(x))+e^x\right)'$$

$$e^{f(x)}f'(x)+1=f'(f(x))f'(x)+e^x$$

Υποθέτω ότι η f έχει ακρότατο στο x_o άρα $f'(x_o)=0$ (Fermat)

Οπότε $e^{f(x_o)}f'(x_o)+1=f'(f(x_o))f'(x_o)+e^{x_o}$ και $f'(x_o)=0$

$$e^{f(x_o)}\underbrace{\cancel{f'(x_o)}}_{0}+1=f'(f(x_o))\underbrace{\cancel{f'(x_o)}}_{0}+e^{x_o}$$

$$1=e^{x_o}$$

$x_o=0$ άτοπο αφού $f'(0)=1\neq 0$

άρα η f δεν έχει ακρότατο στο x_o

Η f' είναι συνεχής και μη-μηδενική άρα διατηρεί πρόσημο στο R και $f'(0)=1>0$ άρα

$f'(x)>0$ άρα f γνησίως αύξουσα στο R

Δ.3.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=?$$

$-1\le \eta\mu x\le 1$

$\underline{-1\le \sigma\upsilon\nu x\le 1}$

$-2\le \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\le 2$

και διαιρώντας με $f(x)>0$

(η f είναι συνεχής στο R με σ.τ. το R άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ δηλαδή $f(x)>0$ κοντά στο $+\infty$)

προκύπτει

$$-\frac{2}{f(x)}\le\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\le\frac{2}{f(x)}$$

οπότε από **κριτ.Παρεμβολής** ,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$$

Δ.4.

Θέλω νδο

$$0<\int_1^{e^\pi}\frac{f(\ln x)}{x}dx<\pi^2$$

Θέτω $u=\ln x$, $du=\frac{1}{x}dx$ και για $x=1 \rightarrow u=0$, $x=e\pi \rightarrow u=\ln e^{\pi}=\pi$

Οπότε αρκεί νδο

$$0<\int_0^{\pi} f(u)du<\pi^2$$

$$0\le x\le\pi \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(0)\le f(x)\le f(\pi)\Rightarrow 0\le f(x)\le\pi$$

και f με την ισότητα να μην ισχύει παντού άρα και $0<\int_0^{\pi} f(x)dx<\int_0^{\pi}\pi dx$ οπότε

$$0<\int_0^{\pi} f(x)dx<\pi\int_0^{\pi}1dx$$

$$0<\int_0^{\pi} f(x)dx<\pi\,\underbrace{\cancel{[x]_0^{\pi}}}_{\pi}$$

$$0<\int_0^{\pi} f(x)dx<\pi^2$$