ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2021

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΕΥΣΤΑΘΙΟΥ ΝΙΚΟΛΑΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ 135
Α2. Θεωρία σελ 51
Α3. Θεωρία σελ 23
Α4. α. Σωστό β. Λάθος γ. Σωστό δ. Σωστό ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Θέτουμε $x+1=u \Leftrightarrow x=u-1$ οπότε η σχέση γίνεται:

$$f(u)=ue^{-(u-1)} \Rightarrow f(u)=ue^{1-u}\ ,u\in R$$

άρα $f(x)=xe^{1-x}$ για κάθε $x\in R$.

Β2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x)=(x)'e^{1-x}+x(e^{1-x})'=e^{1-x}+xe^{1-x}(1-x)'=e^{1-x}-xe^{1-x}=(1-x)e^{1-x}$$

Όμως $e^{1-x}>0$ για κάθε $x\in R$ άρα $f'(x)=0 \Leftrightarrow 1-x=0 \Leftrightarrow x=1$ και

$$f'(x)<0 \Leftrightarrow 1-x<0 \Leftrightarrow x>1\ ,\ f'(x)>0 \Leftrightarrow 1-x>0 \Leftrightarrow x<1$$

άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[1,+\infty)$ και παρουσιάζει μέγιστο στη θέση $x=1$ με τιμή $f(1)=e^0=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\uparrow$		$\downarrow$

Ο.Μ

Β3. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με

$$f''(x)=(1-x)'e^{1-x}+(1-x)(e^{1-x})'=-e^{1-x}+(1-x)e^{1-x}(1-x)'=-e^{1-x}-(1-x)e^{1-x}=(x-2)e^{1-x}$$

Όμως $e^{1-x}>0$ για κάθε $x\in R$ άρα $f''(x)=0 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ και

$$f''(x)<0 \Leftrightarrow x-2<0 \Leftrightarrow x<2\ ,\ f'''(x)>0 \Leftrightarrow x-2>0 \Leftrightarrow x>2$$

άρα η f είναι κοίλη στο $(-\infty,2]$, κυρτή στο $[2,+\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στη θέση $x=2$ οπότε το σημείο καμπής είναι το $A(2,2e^{-1})$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Σ.Κ

Η f είναι συνεχής στο R άρα η C_f δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Επίσης:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-x}\overset{1-x=u}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty$ άρα η C_f δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1-x}\overset{1-x=u}{\underset{u\to-\infty}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0=\lambda\in R$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{1-x}=$

$=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x-1}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D.L.H}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x-1}}=0=\beta\in R$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-1}\overset{x-1=u}{\underset{u\to+\infty}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}e^u=+\infty$ άρα η C_f έχει στο $+\infty$ οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία y=0.

B4.i. Είναι $f\left((-\infty,1]\right)\overset{f:\uparrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\, f(1)]\right)=(-\infty,1]$ διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{1-x}\underset{u\to+\infty}{\overset{1-x=u}{=}}\lim\limits_{u\to+\infty}e^{u}=+\infty$

και $f\left([1,+\infty)\right)\overset{f:\downarrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\, f(1)]\right)=(0,1]$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ από ερώτημα B3.

Άρα το σύνολο τιμών της συνάρτησης είναι $f(A)=f\left((-\infty,1]\right)\cup f\left([1,+\infty)\right)=(-\infty,1]$.

ii. Για $\lambda\le 0$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση γιατί το λ θα ανήκει μόνο στην εικόνα του διαστήματος $(-\infty,1]$, για $0<\lambda<1$ η εξίσωση έχει 2 λύσεις γιατί το λ θα ανήκει στην εικόνα και του διαστήματος $(-\infty,1]$ αλλά και του διαστήματος $[1,+\infty)$, για $\lambda=1$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση γιατί είναι η θέση μοναδικού μεγίστου και για $\lambda>1$ η εξίσωση δεν έχει καμία λύση γιατί το λ δεν ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(ax^3-3x^2-x+1)=1$ και $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\sigma\upsilon\nu x=1$ και $f(0)=1$

άρα η f είναι συνεχής στο $x_0=0$. Επίσης

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^3-3x^2-x+1-1}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{ax^3-3x^2-x}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x(ax^2-3x-1)}{x}=\lim_{x\to0^-}$$