ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ΄ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ
ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. α. Θεωρία σελ.15
β. Θεωρία σελ. 35,36
Α2. Θεωρία σελ.142
Α3. Θεωρία σελ.135
Α4. α. Λάθος διότι η f πρέπει να είναι παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Α (παράδειγμα σελ 134)
β. Λάθος γιατί αυτό συμβαίνει μόνο όταν η f είναι συνεχής στο x_0.
Α5. γ.

ΘΕΜΑ Β

Β1.Η C_f έχει στο $+\infty$ ασύμπτωτη την ευθεία $y=2$ άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$

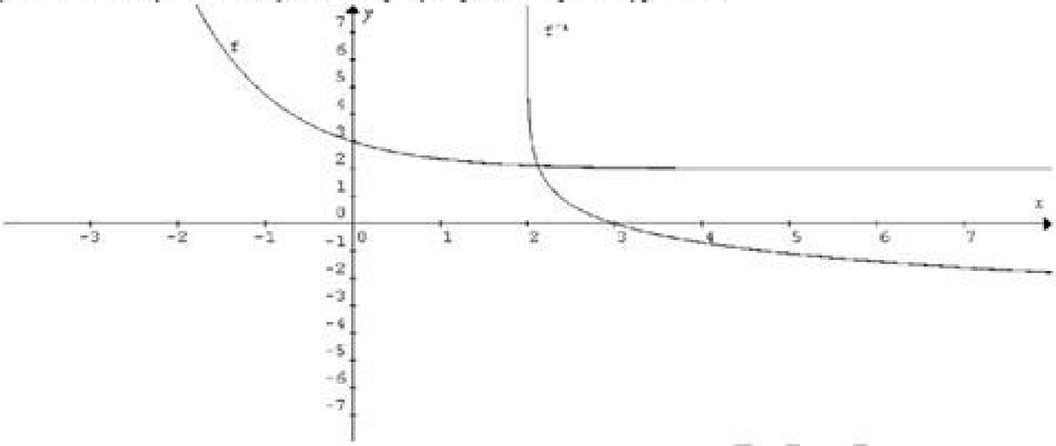
Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=\lambda$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} \overset{-x=u}{=} \lim\limits_{u\to-\infty} e^{u}=0$ άρα $\lambda=2$.

Β2. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=f(x)-x=e^{-x}-x+2, A_g=\mathbb{R}$ με $g(2)=e^{-2}>0, g(3)=e^{-3}-1<0$. Η g είναι συνεχής στο [2,3] ως άθροισμα συνεχών και $g(2)\cdot g(3)<0$ άρα σύμφωνα με το Θ.Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(2,3)$: $g(x_0)=0$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=-e^{-x}-1<0$ άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Β3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=-e^{-x}<0$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R άρα 1-1 και αντιστρέψιμη.
Θέτουμε $f(x)=y \Leftrightarrow e^{-x}+2=y \Leftrightarrow e^{-x}=y-2$. Πρέπει $y-2>0 \Leftrightarrow y>2$. Για κάθε $y>2$: $e^{-x}=y-2 \Leftrightarrow -x=\ln(y-2) \Leftrightarrow x=-\ln(y-2) \Leftrightarrow f^{-1}(y)=-\ln(y-2)$.
Άρα $A_{f^{-1}}=(2,+\infty), f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$.

Β4. Είναι $\lim\limits_{x\to2^+} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left(-\ln(x-2)\right) \overset{x-2=u}{=} \lim\limits_{u\to0^+}\left(-\ln u\right)=+\infty$ άρα η $C_{f^{-1}}$ έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=2$.

Η C_f προκύπτει από την κατακόρυφη μετατόπιση της συνάρτησης e^{-x} κατά 2 μονάδες προς τα πάνω ενώ η $C_{f^{-1}}$ προκύπτει από την οριζόντια μετατόπιση κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά της $-\ln x$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 άρα και συνεχής στο 1 άρα $\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=f(1)\Leftrightarrow \alpha+1=1+\beta=\alpha+1$ άρα $\alpha+1=1+\beta\Leftrightarrow\alpha=\beta$ (1).

Η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 άρα $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ με

$$\lim_{x\to1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-(1+\alpha)}{x-1}=\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\beta x-1-\alpha}{x-1}\overset{\alpha=\beta}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+\alpha x-1-\alpha}{x-1}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}$$

$$\underset{D.L.H}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to1^-}\frac{e^{x-1}+a}{1}=1+a \text{ και } \lim_{x\to1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2+\alpha-(1+\alpha)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{x-1}=$$

$$=\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to1^+}(x+1)=2 \text{ άρα } a+1=2\Leftrightarrow a=1 \text{ και από την (1) } \beta=1.$$

Γ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(-\infty,1]$ με $f'(x)=e^{x-1}+1>0$ και στο $[1,+\infty)$ με $f'(x)=2x>0$ διότι $x\geq1$ άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R. Είναι

$f(A)=f((-\infty,+\infty))\overset{\nearrow}{=}\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ διότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x-1}+\lim\limits_{x\to-\infty}x=-\infty$

Γ3. i. Η f είναι συνεχής στο [-1,0] ως άθροισμα συνεχών και $f(-1)=e^{-2}-1<0$ και $f(0)=e^{-1}>0$ άρα $f(-1)\cdot f(0)<0$ άρα σύμφωνα με το Θ.Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(-1,0)$: $f(x_0)=0$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο R οπότε η αρνητική ρίζα x_0 είναι μοναδική.

ii. Η εξίσωση είναι: $f^2(x)-x_0f(x)=0\Leftrightarrow f(x)\left(f(x)-x_0\right)=0\Leftrightarrow f(x)=0$ ή $f(x)=x_0$

Όμως η f έχει μοναδική ρίζα το x_0 άρα η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$. Επίσης για κάθε $x>x_0\overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow}f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)>0>x_0$ άρα η εξίσωση $f(x)=x_0$ είναι αδύνατη.

Γ4. Τη χρονική στιγμή t η θέση του σημείου Μ είναι $M(x(t),y(t))$ δηλαδή $M(x(t),x^2(t)+1)$. Το εμβαδόν του σχηματιζόμενου τριγώνου, τη χρονική στιγμή t, είναι $E(t)=\frac{1}{2}OK\cdot KM=\frac{1}{2}x(t)\cdot(x^2(t)+1)=\frac{1}{2}x^3(t)+\frac{1}{2}x(t)$ οπότε ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι $E'(t)=\frac{3}{2}x^2(t)x'(t)+\frac{1}{2}x'(t)$. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ είναι $x'(t)=2\mu/\sec$ άρα $E'(t)=3x^2(t)+1$ οπότε τη χρονική στιγμή t_0 όπου $x(t_0)=3$ θα είναι
$E'(t_0)=3x^2(t_0)+1=28\mu^2/\sec$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Το $A(1,1)\in C_f$ άρα $f(1)=1\Leftrightarrow\alpha+\beta=1$ (1). Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=(x-1)'\ln(x^2-2x+2)+(x-1)\cdot\left[\ln(x^2-2x+2)\right]'+\alpha=$

$$=\ln(x^2-2x+2)+(x-1)\cdot\frac{1}{x^2-2x+2}\left[(x^2-2x+2)\right]'+\alpha=\ln(x^2-2x+2)+(x-1)\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+2}+\alpha$$

Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης στο 1 είναι
$\lambda=-1\Leftrightarrow f'(1)=-1\Leftrightarrow\alpha=-1$ άρα από (1): $\beta=2$.

Δ2. Το εμβαδόν είναι $\int_1^2\left|f(x)-y\right|dx=\int_1^2\left|(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2-(-x+2)\right|dx=$
$=\int_1^2\left|(x-1)\ln(x^2-2x+2)\right|dx$ με $x-1\geq 0$. Θεωρούμε $h(x)=\ln(x^2-2x+2)$. Η h είναι παραγωγίσιμη στο R με $h'(x)=\frac{2x-2}{x^2-2x+2}\geq 0$ για κάθε $x\in[1,2]$ άρα το εμβαδόν είναι: $E=\int_1^2(x-1)\ln(x^2-2x+2)dx=\frac{1}{2}\int_1^2 2(x-1)\ln(x^2-2x+2)dx$. Θέτουμε $u=x^2-2x+2$ με $du=(2x-2)dx$. Αν $x=1\Rightarrow u=1$ ενώ αν $x=1\Rightarrow u=2$ οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται: $\frac{1}{2}\int_1^2\ln u\,du=\frac{1}{2}\int_1^2(u)'\ln u\,du=\frac{1}{2}\left(\left[u\ln u\right]_1^2-\int_1^2 1du\right)=$
$=\frac{1}{2}\left(2\ln 2-\left[u\right]_1^2\right)=\frac{1}{2}(2\ln 2-1)=\ln 2-\frac{1}{2}\tau.\mu.$

Δ3. i. Αρκεί : $\ln(x^2-2x+2)+(x-1)\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+2}-1\geq -1\Leftrightarrow\ln(x^2-2x+2)+(x-1)\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+2}\geq 0$.

Από Δ2: $\ln(x^2-2x+2)\geq 0$ και $(x-1)\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+2}=\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0$ διότι $x^2-2x+2>0$ διότι $\Delta=-4<0$.

ii. Η ανίσωση γίνεται: $f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq f(\lambda)+\lambda-2+\frac{3}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}$. Η f είναι συνεχής στο $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη στο $\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ με $f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+(x-1)\cdot\frac{2x-2}{x^2-2x+2}-1$ άρα σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$: $f'(\xi)=\dfrac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}=$

$=\dfrac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\frac{1}{2}}=2\left(f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\right)$. Από Δ3i. $f'(\xi)\geq-1\Leftrightarrow 2\left(f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\right)\geq-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq-\frac{1}{2}\Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}$

Δ4. Έστω $M(x_1,f(x_1))$ το σημείο επαφής οπότε η εφαπτομένη της C_f στο Μ:

$y-f(x_1)=f'(x_1)(x-x_1)\Leftrightarrow y-(x_1-1)\ln\left(x_1^2-2x_1+2\right)+x_1-2=\left(\ln(x_1^2-2x_1+2)+\frac{2(x_1-1)^2}{x_1^2-2x_1+2}-1\right)(x-x_1)$

$\Leftrightarrow y=\left(\ln(x_1^2-2x_1+2)+\frac{2(x_1-1)^2}{x_1^2-2x_1+2}-1\right)x+(x_1-1)\ln\left(x_1^2-2x_1+2\right)-x_1+2-\left(\ln(x_1^2-2x_1+2)+\frac{2(x_1-1)^2}{x_1^2-2x_1+2}-1\right)x_1$

Η g είναι παραγωγίσιμη στο R με $g'(x)=-3x^2-1$ και έστω $N(x_2,g(x_2))$ το σημείο επαφής άρα η εφαπτομένη της C_g στο Ν: $y-g(x_2)=g'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow$ $y-\left(-x_2^3-x_2+2\right)=\left(-3x_2^2-1\right)(x-x_2)\Leftrightarrow y=\left(-3x_2^2-1\right)x-x_2^3-x_2+2+3x_2^3+x_2\Leftrightarrow$ $y=\left(-3x_2^2-1\right)x+2x_2^3+2$. Για να έχουν οι C_f,C_g κοινή εφαπτομένη θα πρέπει οι 2 ευθείες να ταυτίζονται άρα:

$$\begin{cases}\ln(x_1^2-2x_1+2)+\dfrac{2(x_1-1)^2}{x_1^2-2x_1+2}-1=-3x_2^2-1\quad(1)\\ (x_1-1)\ln\left(x_1^2-2x_1+2\right)-x_1+2-\left(\ln(x_1^2-2x_1+2)+\dfrac{2(x_1-1)^2}{x_1^2-2x_1+2}-1\right)x_1=2x_2^3+2\quad(2)\end{cases}\Leftrightarrow.$$

$$\begin{cases}\ln(x_1^2-2x_1+2)+\dfrac{2(x_1-1)^2}{x_1^2-2x_1+2}=-3x_2^2\\ (x_1-1)\ln\left(x_1^2-2x_1+2\right)-x_1+2-\left(\ln(x_1^2-2x_1+2)+\dfrac{2(x_1-1)^2}{x_1^2-2x_1+2}-1\right)x_1=2x_2^3+2\end{cases}$$

Όμως από Δδ3i. $\ln(x_1^2-2x_1+2)+\frac{2(x_1-1)^2}{x_1^2-2x_1+2}\geq 0, -3x_2^2\leq 0$ και επίσης $-3x_2^2\leq 0$ άρα για να ισχύει η ισότητα θα πρέπει $\ln(x_1^2-2x_1+2)+\frac{2(x_1-1)^2}{x_1^2-2x_1+2}=-3x_2^2=0$ άρα

$\begin{cases}\ln(x_1^2-2x_1+2)+\frac{2(x_1-1)^2}{x_1^2-2x_1+2}=0\\ -3x_2^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ln(x_1^2-2x_1+2)+\frac{2(x_1-1)^2}{x_1^2-2x_1+2}=0\\ x_2=0\end{cases}$ με την $1^η$ ισότητα να ισχύει μόνο για $x_1=1$. Άρα τα σημεία επαφής είναι $M(1,f(1))$ δηλαδή το $M(1,1)$ και το $N(0,g(0))$ δηλαδή το $N(0,2)$. Η κοινή εφαπτομένη είναι η εφαπτομένη του ερωτήματος Δ1 δηλαδή η $\varepsilon: y=-x+2$.