ΠΡΩΤΟ φροντιστήριο

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2018

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ 99

Α2. Η παραπάνω πρόταση είναι **ψευδής**. Έστω η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{1}{x}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $f(x_1)=f(x_2) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1}=\dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1 στο πεδίο ορισμού της. Παρατηρούμε ότι: $f(-2)=-\dfrac{1}{2} > f(-1)=-1$ και $f(2)=\dfrac{1}{2} > f(-1)=-1$ άρα ενώ η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, δεν είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.

Α3.
α. Λάθος **β. Λάθος** **γ. Σωστό** **δ. Σωστό** **ε. Σωστό**

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η f είναι παραγωγίσιμη στο D_f με $f'(x)=1+\dfrac{8}{x^3}=\dfrac{x^3+8}{x^3}$ οπότε $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3+8=0 \Leftrightarrow x^3=-8 \Leftrightarrow x=-2$. Κάνουμε τον πίνακα προσήμων της παραγώγου:

x	$-\infty$	-2		0		$+\infty$
x^3	$-$		$-$	0	$+$	
x^3+8	$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$+$		$-$		$+$	
$f(x)$	$\uparrow$		$\downarrow$		$\uparrow$	
		Τ.Μ				

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $(0,+\infty)$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,0)$ και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση $x=-2$ με τιμή $f(-2)=-3$.

Β2. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο D_f με

$$f''(x)=\left(\frac{x^3+8}{x^3}\right)'=\frac{(x^3+8)'\cdot x^3-(x^3+8)\cdot(x^3)'}{x^6}=\frac{3x^5-3x^5-24x^2}{x^6}=\frac{-24x^2}{x^6}=\frac{-24}{x^4}<0$$

άρα η f είναι κοίλη στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ και η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

B3. Εξετάζουμε τις κατακόρυφες ασύμπτωτες:

Είναι $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(x-\dfrac{4}{x^2}\right)=-\infty$ άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$.

Εξετάζουμε τις πλάγιες ασύμπτωτες

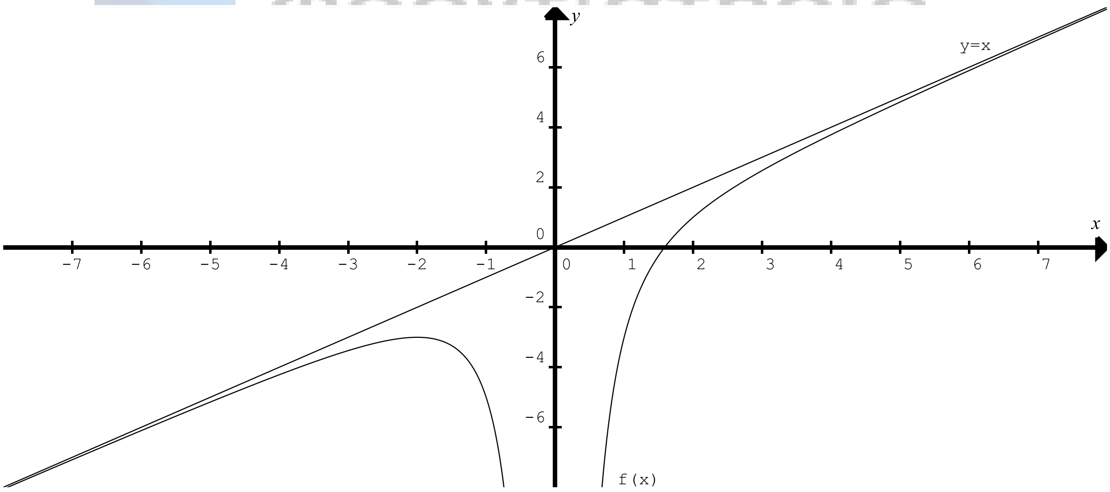
- στο $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\dfrac{x^3-4}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-4}{x^3}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3}{x^3}=1=\lambda$ και

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^3-4}{x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3-4-x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-4}{x^3}=0=\beta$ άρα η C_f έχει στο $-\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y=x$.

- στο $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{x^3-4}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-4}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{x^3}=1=\lambda$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3-4}{x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3-4-x^3}{x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-4}{x^3}=0=\beta$ άρα η C_f έχει στο $+\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y=x$.

B4.



Γ1. Για το τετράγωνο θα χρησιμοποιήσουμε σύρμα μήκους x άρα η κάθε του πλευρά θα έχει μήκος $\frac{x}{4}m$ άρα το εμβαδόν του τετραγώνου θα είναι $E_1=\frac{x^2}{16}m^2$ Για τον κύκλο θα χρησιμοποιήσουμε σύρμα μήκους $8-x\ m$ άρα αν ρ είναι η ακτίνα του κύκλου τότε $2\pi\rho=8-x\Leftrightarrow\rho=\frac{8-x}{2\pi}$ και το εμβαδόν του κύκλου θα είναι

$E_2=\pi\rho^2=\pi\cdot\left(\frac{8-x}{2\pi}\right)^2=\pi\cdot\frac{x^2-16x+64}{4\pi^2}=\frac{x^2-16x+64}{4\pi}m^2$. Το συνολικό εμβαδόν είναι

$E=E_1+E_2=\frac{x^2}{16}+\frac{x^2-16x+64}{4\pi}=\frac{\pi x^2+4x^2-64x+256}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}m^2$ και επειδή $x>0$, $8-x>0$ άρα $x\in(0,8)$.

Γ2. Η συνάρτηση Ε είναι παραγωγίσιμη στο $(0,8)$ με $E'(x)=\frac{2(\pi+4)x-64}{16\pi}$ και

$E'(x)=0\Leftrightarrow 2(\pi+4)x=64\Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$ οπότε από τον πίνακα μονοτονίας:

x	0	$\frac{32}{\pi+4}$	8
$E'(x)$	$-$	0	$+$
$E(x)$	□		□

Άρα το συνολικό εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν : $x=\frac{32}{\pi+4}$.

Η πλευρά του τετραγώνου ισούται με τη διάμετρο του κύκλου άρα

$\frac{x}{4}=2\rho\Leftrightarrow\frac{x}{4}=\frac{8-x}{\pi}\Leftrightarrow\pi x=32-4x\Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$.

Γ3. Αρκεί να δείξουμε ότι εξίσωση $E(x)=5$ έχει μοναδική λύση στο διάστημα (0,8). Η εξίσωση γίνεται:

$E(x)=5\Leftrightarrow\frac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi}=5\Leftrightarrow(\pi+4)x^2-64x+256-80\pi=0$. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=(\pi+4)x^2-64x+256-80\pi$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο R με

$g'(x)=2(\pi+4)x-64$ γίνεται ελάχιστο όταν : $x=\frac{32}{\pi+4}$.

x	0	$\frac{32}{\pi+4}$	8
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\downarrow$		$\uparrow$

Βρίσκουμε την εικόνα του κάθε διαστήματος μονοτονίας:

- $g\left(\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]\right)\overset{g:\downarrow}{=}\left[g\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right),\lim\limits_{x\to 0^+}g(x)\right)=\left[g\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right),256-80\pi\right)$ και

παρατηρούμε ότι το $0\in g\left(\left(0,\dfrac{32}{\pi+4}\right]\right)$.

- $g\left(\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)\right)\overset{g:\uparrow}{=}\left[g\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right),\lim\limits_{x\to 8^-}g(x)\right)=\left[g\left(\dfrac{32}{\pi+4}\right),-16\pi\right)$ και

παρατηρούμε ότι το $0\notin g\left(\left[\dfrac{32}{\pi+4},8\right)\right)$.

Άρα υπάρχει μοναδικός τρόπος.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η C_f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=2e^{x-a}-2x$ και

$f''(x)=2e^{x-a}-2$ οπότε $f''(x)=0\Leftrightarrow 2e^{x-a}=2\Leftrightarrow e^{x-a}=1\Leftrightarrow x-a=0\Leftrightarrow x=a$,

$f''(x)<0\Leftrightarrow e^{x-a}<1\Leftrightarrow x-a<0\Leftrightarrow x<a$, $f''(x)>0\Leftrightarrow e^{x-a}>1\Leftrightarrow x-a>0\Leftrightarrow x>a$

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frown$		$\smile$

Άρα η C_f έχει μοναδικό σημείο καμπής το $A(a,f(a))$.

Δ2. Βρίσκουμε το την εικόνα των διαστημάτων μονοτονίας της παραγώγου. Τονίζουμε ότι η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty,a]$, και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[a,+\infty)$.

- $f'((-\infty,a])\overset{f':\square}{=}\left[f'(a),\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)\right)=[2-2a,+\infty)$ διότι $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x-a}=0$ και

παρατηρούμε ότι $0\in f'((-\infty,a])$ διότι $2-2a<0$ και επειδή η f΄ είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα αυτό υπάρχει μοναδικό $x_1\in(-\infty,a]$: $f'(x_1)=0$

- $f'([a,+\infty))\overset{f':\square}{=}\left[f'(a),\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)\right)=[2-2a,+\infty)$ διότι $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2e^{x-a}-2x\right]=$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^{x-a}\left[1-\dfrac{x}{e^{x-a}}\right]\right)$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-a}=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^{x-a}}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{\underset{D.L.H}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^{x-a}}=0$ Παρατηρούμε ότι $0\in f'([a,+\infty))$ διότι $2-2a<0$ και επειδή η f΄ είναι γνησίως μονότονη στο διάστημα αυτό υπάρχει μοναδικό $x_2\in[a,+\infty)$: $f'(x_2)=0$

x	$-\infty$	x_1	a	x_2	$+\infty$
$f'(x)$		$\downarrow$		$\uparrow$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$ | $-$	0	$+$
$f(x)$	$\uparrow$		$\downarrow$ | $\downarrow$		$\uparrow$

Για $x < x_1 \overset{f':\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(x_1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$ ενώ για $x > x_1 \overset{f':\downarrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < 0$.

Για $x < x_2 \overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(x_2) \Leftrightarrow f'(x) < 0$ ενώ για $x > x_2 \overset{f':\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > 0$.

Άρα η f έχει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2.

Δ3. Στο διάστημα (a, x_2) η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα η εξίσωση γίνεται: $f(x) = f(1) \Leftrightarrow x = 1$ το οποίο είναι αδύνατο διότι $x > a > 1$.

Δ4. Η εφαπτομένη της C_f στο 2 είναι

$y - f(2) = f'(2)(x-2) \Leftrightarrow y + 2 = -2(x-2) \Leftrightarrow y = -2x + 2$. Η f είναι κυρτή στο [2,3] άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη άρα:

$f(x) \geq y \Leftrightarrow f(x) \geq -2x + 2 \Leftrightarrow f(x) \cdot \sqrt{x-2} \geq (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2}$. Οι συναρτήσεις $f(x) \cdot \sqrt{x-2}, (-2x+2) \cdot \sqrt{x-2}$ είναι συνεχείς στο [2,3] και δεν ταυτίζονται σε κάθε σημείο άρα $\int_2^3 \left(f(x) \cdot \sqrt{x-2} \right) dx > \int_2^3 \left((-2x+2) \cdot \sqrt{x-2} \right) dx$. Θέτουμε

$\sqrt{x-2} = u \Leftrightarrow x - 2 = u^2 \Leftrightarrow x = u^2 + 2$ άρα $\frac{dx}{du} = (u^2+2)' \Leftrightarrow \frac{dx}{du} = 2u \Leftrightarrow dx = 2udu$ και για $x = 2 \Rightarrow u = 0$, $x = 3 \Rightarrow u = 1$ άρα:

$$\int_2^3 \left((-2x+2) \cdot \sqrt{x-2} \right) dx = -2\int_2^3 \left((x-1) \cdot \sqrt{x-2} \right) dx = -2\int_0^1 \left((u^2+1) \cdot u \right) 2u \, du =$$

$$= -4\int_0^1 \left(u^4 + u^2 \right) du = -4\left[\frac{u^5}{5} + \frac{u^3}{3} \right]_0^1 = -\frac{32}{15}$$