ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9 ΙΟΥΝΙΟΥ 2017

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό σελ 135

Α2.α. Ο ισχυρισμός είναι ψευδής

β. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=|x|=\begin{cases}-x, x<0\\ x\ , x\geq 0\end{cases}$. Η f είναι συνεχής στο 0 αφού $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=0$ αλλά δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0 διότι:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{-x}{x}=-1\ ,\ \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

άρα $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Α3. Σχολικό σελ 73

Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ)Σ ε)Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $D_{f\circ g}=\left\{x\in D_g, g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\neq 1, \dfrac{x}{1-x}>0\right\}$ οπότε

$\dfrac{x}{1-x}>0\Leftrightarrow x(1-x)>0\Leftrightarrow x\in(0,1)$ άρα $D_{f\circ g}=(0,1)$ και $\left(f\circ g\right)(x)=f(g(x))=\ln\dfrac{x}{1-x}$.

Β2. Έστω $x_1,x_2\in(0,1)$ με $h(x_1)=h(x_2)\Leftrightarrow \ln\dfrac{x_1}{1-x_1}=\ln\dfrac{x_2}{1-x_2}\overset{1-1}{\Leftrightarrow}\dfrac{x_1}{1-x_1}=\dfrac{x_2}{1-x_2}\Leftrightarrow$

$x_1(1-x_2)=x_2(1-x_1)\Leftrightarrow x_1-x_1x_2=x_2-x_1x_2\Leftrightarrow x_1=x_2$ άρα η f είναι 1-1 και αντιστρέψιμη.

Θέτουμε $h(x)=y\Leftrightarrow \ln\dfrac{x}{1-x}=y\overset{e^x}{\Leftrightarrow}\dfrac{x}{1-x}=e^y\Leftrightarrow x=(1-x)e^y\Leftrightarrow x=e^y-xe^y\Leftrightarrow$

$x+xe^y=e^y\Leftrightarrow x(1+e^y)=e^y\Leftrightarrow x=\dfrac{e^y}{e^y+1}$. Πρέπει $0<x<1\Leftrightarrow 0<\dfrac{e^y}{e^y+1}<1\overset{\cdot(e^y+1)}{\Leftrightarrow}0<e^y<e^y+1$

το οποίο ισχύει για κάθε $y\in\mathbb{R}$ άρα $D_{f^{-1}}=\mathbb{R}$ και $f^{-1}(y)=\dfrac{e^y}{e^y+1}\Leftrightarrow f^{-1}(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$.

Β3. Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο R με $\phi'(x)=\dfrac{(e^x)'(e^x+1)-e^x(e^x+1)'}{\left(e^x+1\right)^2}=$

$\dfrac{e^x\cdot(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{e^{2x}+e^x-e^{2x}}{\left(e^x+1\right)^2}=\dfrac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}>0$ άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο R και δεν παρουσιάζει ακρότατα.

Επίσης $\phi''(x)=\dfrac{(e^x)'\left(e^x+1\right)^2-e^x\left[\left(e^x+1\right)^2\right]'}{\left(e^x+1\right)^4}=\dfrac{e^x\cdot\left(e^x+1\right)^2-2e^x\left(e^x+1\right)\left(e^x+1\right)'}{\left(e^x+1\right)^4}=$

$\dfrac{e^x\cdot\left(e^x+1\right)^2-2e^{2x}\left(e^x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^4}=\dfrac{e^x\cdot\left[e^x+1-2e^x\right]}{\left(e^x+1\right)^3}=\dfrac{e^x\cdot\left[1-e^x\right]}{\left(e^x+1\right)^3}$.

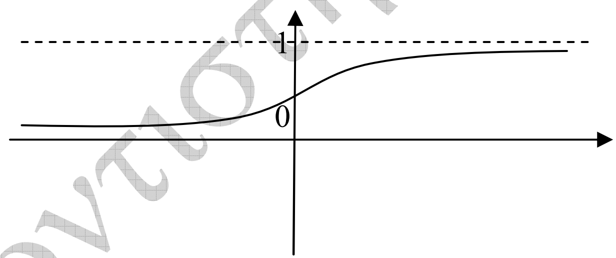
Είναι $\phi''(x)=0\Leftrightarrow\dfrac{e^x\cdot\left[1-e^x\right]}{\left(e^x+1\right)^3}=0\overset{e^x>0,\,(e^x+1)^3>0}{\Leftrightarrow}1-e^x=0\Leftrightarrow 1=e^x\Leftrightarrow x=0$. Ομοίως

$\phi''(x)>0\Leftrightarrow x<0$ και $\phi''(x)<0\Leftrightarrow x>0$ άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$ και κοίλη $[0,+\infty)$ και έχει σημείο καμπής το $A(0,\phi(0))$ δηλαδή το $A\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$.

B4. Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\phi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}=\dfrac{0}{1}=0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x+1}\underset{D.L.H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$ άρα η φ έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ τον άξονα x΄x και στο $+\infty$ την ευθεία $y=1$. Ο πίνακας μεταβολών της φ είναι:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\phi''(x)$	+	○	−
$\phi'(x)$	+		+
$\phi(x)$	↗		↗

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης φαίνεται στο παρακάτω σχήμα



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής. Η εφαπτομένη στο Μ είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\Leftrightarrow y+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0(x-x_0)$ και πρέπει να διέρχεται από το $A\left(\dfrac{\pi}{2},-\dfrac{\pi}{2}\right)$ οπότε: $-\dfrac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\left(\dfrac{\pi}{2}-x_0\right)$ οπότε αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $-\dfrac{\pi}{2}+\eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ έχει ακριβώς δύο λύσεις. Η εξίσωση γίνεται:

$\sigma\upsilon\nu x\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\eta\mu x-\dfrac{\pi}{2}=0$. Θεωρούμε $g(x)=\sigma\upsilon\nu x\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)+\eta\mu x-\dfrac{\pi}{2}=0,\ D_g=[0,\pi]$. Η g έχει προφανείς ρίζες $x=0,\ x=\pi$. Η g είναι παραγωγίσιμη στο (0,π) με

$g'(x)=-\eta\mu x\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)-\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu x=-\eta\mu x\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)$ άρα: $g'(x)=0\Leftrightarrow\eta\mu x=0\ \acute{\eta}\ \dfrac{\pi}{2}-x=0\Leftrightarrow x=\dfrac{\pi}{2}$

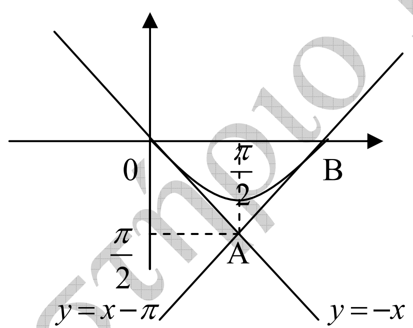
Ο πίνακας μονοτονίας της g είναι:

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$-\eta\mu x$	0	$-$	0	$-$	0
$\frac{\pi}{2}-x$		$+$		$-$	
$g'(x)$		$-$		$+$	
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Για $0\le x\le\frac{\pi}{2}\overset{g:\searrow}{\Leftrightarrow}g(0)\ge g(x)\ge g\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow 0\ge g(x)\ge 1-\frac{\pi}{2}$ άρα η g έχει μοναδική ρίζα το 0 στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ και για $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi\overset{g:\nearrow}{\Leftrightarrow}g\left(\frac{\pi}{2}\right)\le g(x)\le g(\pi)\Leftrightarrow 1-\frac{\pi}{2}\le g(x)\le 0$ άρα η g έχει μοναδικές ρίζες $x=0, x=\pi$.

Η εφαπτομένη της C_f στο 0 είναι: $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Leftrightarrow y=-x$ και η εφαπτομένη στο π είναι: $y-f(\pi)=f'(\pi)(x-\pi)\Leftrightarrow y=x-\pi$

Γ2. Το σχήμα είναι



Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ είναι $E=\frac{1}{2}\cdot OB\cdot\upsilon=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi^2}{4}$ τ.μ ενώ το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f και του άξονα x΄x είναι:

$$E_2=\int_0^{\pi}\left|0-f(x)\right|dx=\int_0^{\pi}\eta\mu x dx=\left[-\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}=-\sigma\upsilon\nu\pi+\sigma\upsilon\nu 0=-(-1)+1=2\text{τ.μ}$$

Άρα το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f και των ευθειών $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι: $E_1=E-E_2=\frac{\pi^2}{4}-2=\frac{\pi^2-8}{4}\tau.\mu.$ Επομένως $\frac{E_1}{E_2}=\frac{\frac{\pi^2-8}{4}}{2}=\frac{\pi^2-8}{8}=\frac{\pi^2}{8}-1$.

Γ3. Είναι $f(x)=-\eta\mu x\Rightarrow f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x\Rightarrow f''(x)=\eta\mu x\ge 0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$ άρα η f είναι κυρτή στο [0,π] όπως άλλωστε φαίνεται και από το παραπάνω σχήμα.

Είναι $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\left[\left(f(x)+x\right)\dfrac{1}{f(x)-x+\pi}\right]$ όπου: $\lim\limits_{x\to\pi}\left(f(x)+x\right)=f(\pi)+\pi$ και $\lim\limits_{x\to\pi}\left(f(x)-x+\pi\right)=f(\pi)=0$ όπου $f(x)>x-\pi \Leftrightarrow f(x)-x+\pi>0$ κοντά στο π.

Επομένως $\lim\limits_{x\to\pi}\left[\dfrac{1}{f(x)-x+\pi}\right]=+\infty$ άρα $\lim\limits_{x\to\pi}\left[\left(f(x)+x\right)\dfrac{1}{f(x)-x+\pi}\right]=+\infty$.

Γ4. Η f κυρτή στο [0,π] και επειδή η εφαπτομένη της C_f στο π είναι $y=x-\pi$ άρα $f(x)\geq x-\pi$ για κάθε $x\in[0,\pi]$ (η ισότητα ισχύει μόνο στο π) άρα για κάθε $x\in[1,e]$:

$\dfrac{f(x)}{x}>\dfrac{x-\pi}{x}\Leftrightarrow\dfrac{f(x)}{x}>1-\dfrac{\pi}{x}\Rightarrow\displaystyle\int_1^e\dfrac{f(x)}{x}dx>\int_1^e\left(1-\dfrac{\pi}{x}\right)dx$ όπου:

$$\int_1^e\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx=\left[x-\pi\ln x\right]_1^e=(e-\pi\ln e)-(1-\pi\ln 1)=e-\pi-1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι συνεχής στο [-1,0) ως ρίζα συνεχούς και στο (0,π] ως γινόμενο συνεχών. Είναι $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\sqrt[3]{x^4}=0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(e^x\eta\mu x)=0$ άρα η f είναι συνεχής και στο 0 άρα είναι συνεχής στο [-1,π].

Επίσης $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\sqrt[3]{x^4}}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-(-x)}=\lim\limits_{x\to0^-}\left[-(-x)^{\frac{1}{3}}\right]=0$ και

$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^x\eta\mu x}{x}=\lim\limits_{x\to0^-}\left[e^x\cdot\dfrac{\eta\mu x}{x}\right]=1$. Επειδή $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Μελετάμε τη μονοτονία της f:

Η f παραγωγίσιμη στο $[-1,0)$ με $f'(x)=\left((-x)^{\frac{4}{3}}\right)'\Rightarrow f'(x)=\dfrac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}(-x)'=-\dfrac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}}<0$

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi]$ με

$f'(x)=e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x$ οπότε $f'(x)=0\Leftrightarrow e^x\eta\mu x+e^x\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow e^x(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)=0\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}$

$$\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=0\Leftrightarrow\eta\mu x=-\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu(\pi-x)\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}-x=2\kappa\pi+\pi-x\\[2mm]\dfrac{\pi}{2}-x=2\kappa\pi-\pi+x\end{cases}.$$

- $\dfrac{\pi}{2}-x=2\kappa\pi+\pi-x\Leftrightarrow\dfrac{\pi}{2}=2\kappa\pi+\pi$ αδύνατη.
- $\dfrac{\pi}{2}-x=2\kappa\pi-\pi+x\Leftrightarrow-2x=2\kappa\pi-\dfrac{3\pi}{2}\Leftrightarrow x=-\kappa\pi+\dfrac{3\pi}{4}$.

Όμως $0<x<\pi\Leftrightarrow0<-\kappa\pi+\dfrac{3\pi}{4}<\pi\overset{-\frac{3\pi}{4}}{\Leftrightarrow}-\dfrac{3\pi}{4}<-\kappa\pi<\dfrac{\pi}{4}\overset{:(-\pi)}{\Leftrightarrow}\dfrac{3}{4}>\kappa>-\dfrac{\pi}{4}$ άρα $\kappa=0$ άρα $x=\dfrac{3\pi}{4}$

Τα κρίσιμα σημεία της f είναι $x=0$ και $x=\dfrac{3\pi}{4}$

Δ2.

Για $x=\frac{\pi}{2}$: $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}\left(\eta\mu\frac{\pi}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}>0$ και επειδή η f΄ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$. Για $x=\frac{5\pi}{6}$:

$f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=e^{\frac{5\pi}{6}}\left(\eta\mu\frac{5\pi}{6}+\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{6}\right)=e^{\frac{5\pi}{6}}\left(\eta\mu\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\sigma\upsilon\nu\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\right)=e^{\frac{5\pi}{6}}\left(\eta\mu\left(\frac{\pi}{6}\right)-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$ $e^{\frac{5\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)<0$ και επειδή η f΄ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$ άρα $f'(x)<0$ για κάθε $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$. Ο πίνακας μονοτονίας της f είναι:

x	-1	0	$\frac{3\pi}{4}$	π
$f'(x)$	$-$	‖ $+$	$\circ$ $-$	
$f(x)$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[-1,0]$ και $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$. Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στη θέση $x=0$ με τιμή $f(0)=0$ και στη θέση $x=\pi$ με τιμή $f(\pi)=0$ ενώ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στη θέση -1 με τιμή $f(-1)=1$ και στη θέση $x=\frac{3\pi}{4}$ με τιμή $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=e^{\frac{3\pi}{4}}\eta\mu\frac{3\pi}{4}=\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}$ διότι: $\eta\mu\frac{3\pi}{4}=\eta\mu\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\eta\mu\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ άρα έχει ολικό ελάχιστο το 0 και ολικό μέγιστο το $\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}$ άρα $f(A)=\left[0,\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}\right]$.

Δ3. Είναι $E(\Omega)=\int_0^{\pi}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\pi}\left|e^x\eta\mu x-e^{5x}\right|dx$. Έστω $h(x)=e^x\eta\mu x-e^{5x}=e^x(\eta\mu x-e^{4x})$.

Είναι $e^x>0$ και για $x>0\Leftrightarrow 4x>0\overset{e^x:\nearrow}{\Leftrightarrow}e^{4x}>e^0\Leftrightarrow e^{4x}>1$ και $\eta\mu x\le 1$ άρα $\eta\mu x-e^{4x}<0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$ άρα $h(x)<0$ για κάθε $x\in[0,\pi]$ επομένως $E(\Omega)=-\int_0^{\pi}\left(e^x\eta\mu x-e^{5x}\right)dx=$

$E(\Omega)=\int_0^{\pi}e^{5x}dx-\int_0^{\pi}e^x\eta\mu x dx$. Είναι $\int_0^{\pi}e^{5x}dx=\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi}=\frac{e^{5\pi}}{5}-\frac{1}{5}=\frac{e^{5\pi}-1}{5}$ $\tau.\mu$

Θέτουμε :

$$I=\int_0^\pi e^x \eta\mu x dx=\int_0^\pi (e^x)'\eta\mu x dx=\left[e^x \eta\mu x\right]_0^\pi-\int_0^\pi e^x \sigma\upsilon\nu x dx=-\int_0^\pi e^x \sigma\upsilon\nu x dx=-\left(\left[e^x \sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi+\int_0^\pi e^x \eta\mu x dx\right)=$$

$$-\left(e^\pi \sigma\upsilon\nu\pi-e^0\sigma\upsilon\nu 0+\int_0^\pi e^x \eta\mu x dx\right)=-\left(-e^\pi-1+I\right)=e^\pi+1-I$$. Άρα $I=e^\pi+1-I \Leftrightarrow 2I=e^\pi+1 \Leftrightarrow I=\dfrac{e^\pi+1}{2}$

Άρα το συνολικό εμβαδόν είναι: $E(\Omega)=\dfrac{e^{5\pi}-1}{5}-\dfrac{e^\pi+1}{2}$.

Δ4. Η εξίσωση γίνεται: $16e^{-\frac{3\pi}{4}}f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2} \overset{:16e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\Leftrightarrow} f(x)-\dfrac{(4x-3\pi)^2}{16}=\dfrac{e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow$

$f(x)=\dfrac{(4x-3\pi)^2}{16}+\dfrac{e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}$. Όμως από το σύνολο τιμών: $f(x)\le\dfrac{e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}$ (η ισότητα ισχύει για $x=\dfrac{3\pi}{4}$) και επειδή $\dfrac{(4x-3\pi)^2}{16}\ge 0$ (η ισότητα ισχύει για $x=\dfrac{3\pi}{4}$) άρα

$f(x)\le\dfrac{e^{\frac{3\pi}{4}}\sqrt{2}}{2}+\dfrac{(4x-3\pi)^2}{16}$ με την ισότητα να ισχύει μόνο στη θέση $x=\dfrac{3\pi}{4}$ άρα η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα $x=\dfrac{3\pi}{4}$.