

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

A.1. απόδειξη / Σ

A.2. ορισμός

A.3. ορισμός

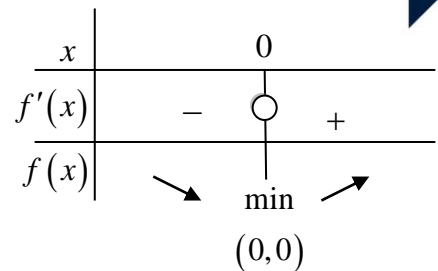
A.4. Λ / Σ / Λ / Σ

ΘΕΜΑ Β

B.1.

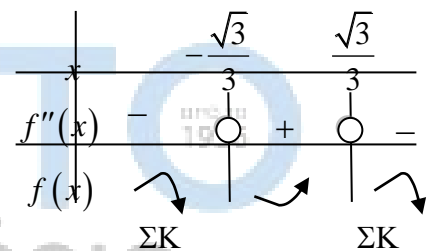
$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \quad \text{με} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$



B.2.

$$f''(x) = \frac{2(1-3x^2)}{(x^2 + 1)^3} \quad \text{με} \quad f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$$



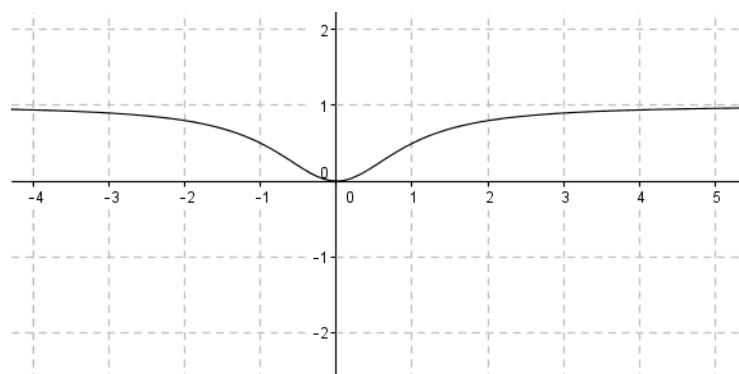
B.3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

άρα $y = 1$ Ο.Α. στο $+\infty$ (ομοίως και στο $-\infty$)

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right)$$

B.4.



ΘΕΜΑ Γ

Γ.1.

Η εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0$ έχει προφανή λύση το $x = 0$ οπότε αρκεί νδο αυτή είναι μοναδική.

Από τη βασική ανίσωση

$$x - 1 \geq \ln x, \quad x > 0 \quad (*)$$

προκύπτει ότι

$$e^{x^2} - 1 \geq \ln e^{x^2} \quad \text{δηλαδή} \quad e^{x^2} - 1 \geq x^2 \ln e \quad \text{δηλαδή} \quad e^{x^2} - 1 \geq x^2 \quad \text{άρα} \quad e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$$

Απόδειξη της (*)

Θέτω $K(x) = x - 1 - \ln x$, $x > 0$

$$K'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

$$K'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x	0	1	
$K'(x)$		-	+
$K(x)$		min	

$(1, K(1))$

Οπότε από τον ορισμό ελαχίστου προκύπτει

$$K(x) \geq K(1) \Leftrightarrow K(x) \geq 0 \Leftrightarrow x - 1 - \ln x \geq 0$$

Γ.2.

$f^2(x) = (e^{x^2} - x^2 - 1)^2$ με $e^{x^2} - x^2 - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Οπότε

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1 \quad \text{ή} \quad f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$$

και $f(0) = 0$

Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και δεν μηδενίζεται σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ άρα διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$

Οπότε

- Αν $x > 0$ και $f(x) > 0$ τότε $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$
- Αν $x > 0$ και $f(x) < 0$ τότε $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$
- Αν $x < 0$ και $f(x) > 0$ τότε $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$
- Αν $x < 0$ και $f(x) < 0$ τότε $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$

Συνεπώς οι ζητούμενες συνεχείς συναρτήσεις είναι

- $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = -(e^{x^2} - x^2 - 1)$, $x \in \mathbb{R}$
- $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x \geq 0 \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x < 0 \end{cases}$
- $f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1, & x < 0 \\ -(e^{x^2} - x^2 - 1), & x \geq 0 \end{cases}$

Γ.3.

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) = 2x(e^{x^2} - 1)$$

$$f''(x) = 4x^2 e^{x^2} + 2(e^{x^2} - 1) \geq 0$$

$$\text{διότι } x^2 \geq 0 \Rightarrow e^{x^2} \geq 1 \Rightarrow e^{x^2} - 1 \geq 0$$

και f'' συνεχής στο 0

άρα

f κυρτή στο \mathbb{R}

Γ.4.

$$f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x), \quad x \geq 0 \quad (1)$$

Θέτω $h(x) = f(x+3) - f(x)$ με $h'(x) = f'(x+3) - f'(x) > 0$ άρα h
γνησ. αύξουσα άρα 1-1

Διότι

$$x < x+3 \stackrel{f' \uparrow}{\Rightarrow} f'(x) < f'(x+3) \Rightarrow f'(x+3) - f'(x) > 0$$

άρα η (1) δίνει

$$h(|\eta\mu x|) = h(x)$$

$$\begin{aligned} |\eta\mu x| &= x \\ x &= 0 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1.

$$\bullet \int_0^{\pi} (f(x) + f''(x))\eta\mu x dx = \pi \Leftrightarrow \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx + \int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx + [f'(x)\eta\mu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx + \cancel{[f'(x)\eta\mu x]_0^{\pi}} - \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx - \int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx = \pi \Leftrightarrow$$

$$\int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx - [f(x)\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x)\eta\mu x dx = \pi \Leftrightarrow -[f(x)\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = \pi \Leftrightarrow$$

$$-f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi + f(0)\sigma\upsilon\nu 0 = \pi \Leftrightarrow -f(\pi)(-1) + \cancel{f(0)} = \pi \Leftrightarrow f(\pi) = \pi$$

Αιτιολόγηση

Θέτω $K(x) = \frac{f(x)}{\eta\mu x} \Leftrightarrow f(x) = \eta\mu x \cdot K(x)$ με $\lim_{x \rightarrow 0} K(x) = 1$

Η f είναι συνεχής στο 0 άρα $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (K(x)\eta\mu x) = 1 \cdot 0 = 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{K(x) \cdot \eta\mu x}{x} = 1 \cdot 1 = 1 \text{ άρα } f'(0) = 1$$

Δ.2.

Είναι $e^{f(x)} + x = f(f(x)) + e^x$ οπότε

$$(e^{f(x)} + x)' = (f(f(x)) + e^x)'$$

$$e^{f(x)} f'(x) + 1 = f'(f(x)) f'(x) + e^x$$

Υποθέτω ότι η f έχει ακρότατο στο x_0 άρα $f'(x_0) = 0$ (Fermat)

Οπότε $e^{f(x_0)} f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) f'(x_0) + e^{x_0}$ και $f'(x_0) = 0$

$$e^{f(x_0)} \cancel{f'(x_0)} + 1 = f'(f(x_0)) \cancel{f'(x_0)} + e^{x_0}$$

$$1 = e^{x_0}$$

$$x_0 = 0 \text{ άτοπο αφού } f'(0) = 1 \neq 0$$

άρα η f δεν έχει ακρότατο στο x_0

Η f' είναι συνεχής και μη-μηδενική άρα διατηρεί πρόσημο στο R και $f'(0) = 1 > 0$
άρα

$$f'(x) > 0 \text{ άρα } f \text{ γνησίως αύξουσα στο } R$$

Δ.3.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = ?$$

$$-1 \leq \eta\mu x \leq 1$$

$$-1 \leq \sigma\upsilon\nu x \leq 1$$

$$-2 \leq \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \leq 2$$

και διαιρώντας με $f(x) > 0$

(η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} με σ.τ. το \mathbb{R} άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ δηλαδή $f(x) > 0$ κοντά στο $+\infty$)
προκύπτει

$$-\frac{2}{f(x)} \leq \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{2}{f(x)}$$

οπότε από κριτ. Παρεμβολής,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$$

Δ.4.

Θέλω νδο

$$0 < \int_1^{e^\pi} \frac{f(\ln x)}{x} dx < \pi^2$$

Θέτω $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x} dx$ και για $x = 1 \rightarrow u = 0$, $x = e^\pi \rightarrow u = \ln e^\pi = \pi$

Οπότε αρκεί νδο

$$0 < \int_0^\pi f(u) du < \pi^2$$

$0 \leq x \leq \pi \Rightarrow f(0) \leq f(x) \leq f(\pi) \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \pi$

και f με την ισότητα να μην ισχύει παντού άρα και $0 < \int_0^\pi f(x) dx < \int_0^\pi \pi dx$ οπότε

$$0 < \int_0^\pi f(x) dx < \pi \int_0^\pi 1 dx$$

$$0 < \int_0^\pi f(x) dx < \pi [x]_0^\pi$$

$$0 < \int_0^\pi f(x) dx < \pi^2$$