Το ΠΡΩΤΟ φροντιστήριο

ΕΙΔΙΚΟ ΓΙΑ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΕΣ ΣΧΟΛΕΣ ΚΑΙ ΕΛ.ΑΣ.

Εθνικής Αμύνης 34, 546 21 ΘΕΣ/ΝΙΚΗ

Τηλ./Fax: 2310 277801 - 2310 278201

www.frontistirioproto.gr

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΜΑΘΗΜΑ: ΤΜΗΜΑ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

ΒΑΘΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ 194

Α2. Θεωρία σελ 188

Α3. Θεωρία σελ 259

Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Σ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2=4|z-1|^2 \Leftrightarrow (z-4)(\bar{z}-4)=4(z-1)(\bar{z}-1)$

$\Leftrightarrow z\bar{z}-\cancel{4z}-\cancel{4\bar{z}}+16=4z\bar{z}-\cancel{4z}-\cancel{4\bar{z}}+4 \Leftrightarrow 3z\bar{z}=12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z\bar{z}=4 \Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow |z|=2$

Β2. Γνωρίζουμε ότι $|z_1|=2 \Leftrightarrow z_1\bar{z_1}=4 \Leftrightarrow \bar{z_1}=\frac{4}{z_1}$ και

$|z_2|=2 \Leftrightarrow z_2\bar{z_2}=4 \Leftrightarrow \bar{z_2}=\frac{4}{z_2}$.

α) $\bar{w}=\overline{\left(\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right)}=\frac{2\bar{z_1}}{\bar{z_2}}+\frac{2\bar{z_2}}{\bar{z_1}}=2\frac{\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}}+2\cdot\frac{\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}}=2\frac{z_2}{z_1}+2\cdot\frac{z_1}{z_2}=w$

Άρα $w\in\mathbb{R}$.

β) Έχουμε ότι $|w|=\left|\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}\right|=\left|\frac{2z_1^2+2z_2^2}{z_1z_2}\right|=\frac{|2z_1^2+2z_2^2|}{|z_1||z_2|}=$

$=\frac{2|z_1^2+z_2^2|}{|z_1||z_2|}=\frac{|z_1^2+z_2^2|}{2}\le\frac{|z_1^2|}{2}+\frac{|z_2^2|}{2}=\frac{|z_1|^2}{2}+\frac{|z_2|^2}{2}=4$

Όμως από ερώτημα (α) $w\in\mathbb{R}$. Άρα $|w|\le 4 \Leftrightarrow -4\le w\le 4$.

B3. Αν $w=-4 \Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}=-4 \overset{z_1z_2}{\Leftrightarrow} 2z_1^2+2z_2^2=-4z_1z_2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow z_1^2+z_2^2=-2z_1z_2 \Leftrightarrow z_1^2+2z_1z_2+z_2^2=0 \Leftrightarrow (z_1+z_2)^2=0 \Leftrightarrow z_1+z_2=0$.

$\Leftrightarrow z_2=-z_1$.

Έχουμε ότι:

$(AB)=|z_1-z_2|=|z_1-(z_1)|=|z_1+z_1|=2|z_1|=4$.

$(A\Gamma)=|z_1-z_3|=|z_1-2iz_1|=|z_1|\,|1-2i|=2\cdot\sqrt{1+(-2)^2}=2\sqrt{5}$

$(B\Gamma)=|z_2-z_3|=|-z_1-2iz_1|=|z_1|\,|-1-2i|=2\sqrt{(-1)^2+(-2)^2}=2\sqrt{5}$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με κορυφή Γ.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξη συνεχών

Επιπλέον $f'(x)=\left(\frac{e^x}{x^2+1}\right)'=\frac{(e^x)'(x^2+1)-e^x(x^2+1)'}{(x^2+1)^2}=$

$=\frac{e^x(x^2+1)-e^x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x^2-2x+1)}{(x^2+1)^2}=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}\geq 0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

Επομένως η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Το σύνολο τιμών της $f(x)$ είναι $f(A)=f((-\infty,+\infty)) \overset{f:\nearrow}{=}$

$=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)$

• $\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)$

όμως $\lim_{x\to-\infty}e^x=0$, $\lim_{x\to-\infty}(x^2+1)=+\infty$ άρα $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$.

Άρα $\lim_{x\to-\infty}\left(e^x\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)=0$

• $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}$

Όμως $\lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty$, $\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)=+\infty$

Το ΠΡΩΤΟ φροντιστήριο
ΕΙΔΙΚΟ ΓΙΑ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΕΣ ΣΧΟΛΕΣ ΚΑΙ ΕΛ.ΑΣ.
Εθνικής Αμύνης 34, 546 21 ΘΕΣ/ΝΙΚΗ
Τηλ./Fax: 2310 277801 - 2310 278201
www.frontistirioproto.gr

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΜΑΘΗΜΑ: ΤΜΗΜΑ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

ΒΑΘΜΟΣ

Όμως οι συναρτήσεις e^x, x^2+1 είναι παραγωγίσιμες στο $(0,+\infty)$ άρα σύμφωνα με τον κανόνα του de L'Hospital θα έχουμε ότι:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2+1)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$$

Άρα το σύνολο τιμών της $f(x)$ είναι το $(0,+\infty)$

Γ2. $f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=\frac{e^2}{5}\Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=f(2)$ Όμως η $f(x)$ είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και "1-1" Επομένως:

$f(e^{3-x}\cdot(x^2+1))=f(2)\Leftrightarrow e^{3-x}(x^2+1)=2\Leftrightarrow\frac{e^3}{e^x}\cdot(x^2+1)=2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\frac{e^3}{2}=\frac{e^x}{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^3}{2}$. Όμως το $\frac{e^3}{2}\in f(A)$ και επειδή η $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x)=\frac{e^3}{2}$ έχει μοναδική ρίζα.

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\int_\alpha^x f(t)dt$ με $x>0$.

Η συνάρτηση $f(t)$ είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ άρα η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=f(x)$.

Ξέρουμε ότι
- η $h(x)$ είναι συνεχής στο $[2x,4x]$ ως παραγωγίσιμη.
- η $h(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(2x,4x)$ με $h'(x)=f(x)$.

Σύμφωνα λοιπόν με το Θ.Μ.Τ. θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(2x,4x)$ τέτοιο ώστε:

$$h'(\xi) = \frac{h(4x)-h(2x)}{4x-2x} \Leftrightarrow f(\xi) = \frac{\int_a^{4x} f(t)dt - \int_a^{2x} f(t)dt}{2x}$$

$$\Leftrightarrow f(\xi) = \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x}.$$

Όμως η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2x, 4x]$ και επειδή $\xi < 4x \Leftrightarrow f(\xi) < f(4x)$

$$\Leftrightarrow \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{2x} < f(4x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2x f(4x).$$

Γ4 Εξετάζουμε τη συνάρτηση $g(x)$ ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 0$

Έχουμε ότι $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)dt = \lim_{x\to 0^+} \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x}$

Όμως $\lim_{x\to 0^+} \int_{2x}^{4x} f(t)dt = 0$ και $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ και οι συναρτήσεις x, $\int_{2x}^{4x} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμες στο 0. Επομένως από τον κανόνα του de L'Hospital θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\left(\int_{2x}^{4x} f(t)dt\right)'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+} \left(\int_a^{4x} f(t)dt - \int_a^{2x} f(t)dt\right)'$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left[f(4x)\cdot(4x)' - f(2x)(2x)'\right] = \lim_{x\to 0^+} \left[4f(4x) - 2f(2x)\right] = 4f(0) - 2f(0) = 2.$$

Άρα $\lim_{x\to 0^+} g(x) = g(0)$ επομένως η $g(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Για $x > 0$: $g(x) = \frac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)dt$. Όμως η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με $g'(x) = \left(\frac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)dt\right)' =$

Το ΠΡΩΤΟ φροντιστήριο

ΕΙΔΙΚΟ ΓΙΑ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΕΣ ΣΧΟΛΕΣ ΚΑΙ ΕΛ.ΑΣ.
Εθνικής Αμύνης 34, 546 21 ΘΕΣ/ΝΙΚΗ
Τηλ./Fax: 2310 277801 - 2310 278201
www.frontistirioproto.gr

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΜΑΘΗΜΑ: ΤΜΗΜΑ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

ΒΑΘΜΟΣ

$$= -\frac{1}{x^2}\int_{2x}^{4x} f(t)dt + \frac{1}{x}\left(\int_{2x}^{4x} f(t)dt\right)' =$$

$$= \frac{-\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2} + \frac{1}{x}\left(\int_{\alpha}^{4x} f(t)dt - \int_{\alpha}^{2x} f(t)dt\right)' =$$

$$= \frac{-\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2} + \frac{1}{x}\left(f(4x)\cdot(4x)' - f(2x)\cdot(2x)'\right)$$

$$= \frac{-\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2} + \frac{1}{x}\left(4f(4x) - 2f(2x)\right) =$$

$$= \frac{-\int_{2x}^{4x} f(t)dt + 4xf(4x) - 2xf(2x)}{x^2}$$

$$= \frac{2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt + 2xf(4x) - 2xf(2x)}{x^2} =$$

$$= \frac{2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt + 2x\left(f(4x) - f(2x)\right)}{x^2}$$

Όμως από το ερώτημα Γ3 έχουμε ότι $2xf(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)dt > 0$.
Επίσης για $x < 0 \Leftrightarrow 2x < 4x \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} f(2x) < f(4x) \Leftrightarrow$
$f(4x) - f(2x) > 0 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} 2x\left(f(4x) - f(2x)\right) > 0$.

Επομένως $g'(x) > 0 \ \forall x > 0$. και επειδή η g είναι συνεχής στο 0 επομένως η g θα είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$

Το ΠΡΩΤΟ φροντιστήριο
ΕΙΔΙΚΟ ΓΙΑ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΕΣ ΣΧΟΛΕΣ
ΚΑΙ ΕΛ.ΑΣ.
Εθνικής Αμύνης 34, 546 21 ΘΕΣ/ΝΙΚΗ
Τηλ./Fax: 2310 277801 - 2310 278201
www.frontistirioproto.gr

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ....

ΜΑΘΗΜΑ: .... ΤΜΗΜΑ: ....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ....

ΒΑΘΜΟΣ

ΘΕΜΑ Δ

2015

Δ1. $f'(x)\cdot e^{f(x)} + f'(x)\, e^{-f(x)} = 2$

$(e^{f(x)})' - (e^{-f(x)})' = (2x)'$

$(e^{f(x)} - e^{-f(x)})' = (2x)'$

$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c$ (και $c=0$)

$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x$

$e^{f(x)} - \dfrac{1}{e^{f(x)}} = 2x$

$(e^{f(x)})^2 - 1 = 2x\, e^{f(x)}$

$e^{2f(x)} - 2x e^{f(x)} = 1$

$e^{2f(x)} - 2x e^{f(x)} + x^2 = 1 + x^2$

$(e^{f(x)} - x)^2 = x^2+1$

$|e^{f(x)} - x| = \sqrt{x^2+1}$

$e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2+1}$

$e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2+1}$

$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Δ2. (α) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $f''(x) = \dfrac{-x}{(x^2+1)\cdot\sqrt{x^2+1}}$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x		0	
$f''(x)$	+	0	−
$f(x)$	$\cup$		$\cap$

Σ.Κ.
$(0, f(0))$
$(0,0)$

(β) στο $[0,1]$ f $\cap$
άρα $f(x) \le x \Leftrightarrow f(x) - x \le 0$.

$E = \int_0^1 |f(x) - x|\,dx = \int_0^1 (x - f(x))\,dx =$

$= \int_0^1 \left(x - \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right) dx =$

$$= \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx =$$

$$= \underbrace{\int_0^1 x \cdot dx}_{\frac{1}{2}} - \underbrace{\int_0^1 x' \cdot \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)dx}_{\text{Ο.Κ.Π.}\ \ln(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}+1} =$$

$$= \frac{1}{2} - \left(\ln(1+\sqrt{2}) - \sqrt{2} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1$$

$$= \boxed{\sqrt{2} - \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2})} \quad \text{τ.μ.}$$

Δ.3.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1}{\frac{1}{\ln f(x)}} \overset{\frac{0}{0}}{\underset{DLH}{=}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt} \cdot f^2(x)}{\frac{-f'(x)}{\ln^2 f(x) \cdot f(x)}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}}{-f'(x)} \cdot f^3(x) \cdot \ln^2 f(x) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\underbrace{\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt} \cdot f(x)}{-f'(x)}}_{①} \cdot \underbrace{\left(f(x)\ln f(x)\right)^2}_{②} \right) =$$

Υπολογίζω τα επιμέρους όρια

$$= 0$$

Διότι: ① $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt} \cdot f(x)}{-f'(x)} = \frac{f(0)}{-f'(0)} = 0$

② $\lim_{x\to 0^+} f(x)\ln f(x) \overset{u=f(x)}{=\!=} \lim_{u\to 0} u \cdot \ln u \overset{0\cdot\infty}{=} \lim_{u\to 0} \frac{\ln u}{\frac{1}{u}} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{u\to 0} \frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}} =$

$= \lim_{u\to 0} (-u) = 0.$

Δ.4.

Θέτω $h(x)=(x-2)\cdot\left(1-3\cdot\int_0^{x-2} f(t^2)\,dt\right)+(x-3)\cdot\left(8-3\int_0^{x} f^2(t)\,dt\right)$

- h συνεχής στο $[2,3]$
- $h(2)=-1\cdot\left(8-3\cdot\int_0^2 f^2(t)\,dt\right)=3\cdot\int_0^2 f^2(t)\,dt-8<0$ ①

  $h(3)=1\cdot\left(1-3\cdot\int_0^1 f(t^2)\,dt\right)=1-3\cdot\int_0^1 f(t^2)\,dt>0$ ②

άρα $h(2)\cdot h(3)<0$

Διότι

① $f^2(t)\leq t^2 \quad \forall t\in[0,2]$

άρα $\int_0^2 f^2(t)\,dt < \int_0^2 t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2=\frac{8}{3}-0=\frac{8}{3}$

άρα $\int_0^2 f^2(t)\,dt < \frac{8}{3} \Leftrightarrow 3\cdot\int_0^2 f^2(t)\,dt<8.$

② $f(t^2)\leq t^2 \quad \forall t\in[0,1]$

άρα $\int_0^1 f(t^2)\,dt < \int_0^1 t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$

άρα $\int_0^1 f(t^2)\,dt<\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\int_0^1 f(t^2)\,dt<1.$

Λόγω Θ. BOLZANO, η $h(x)=0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(2,3)$.