ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ 2004
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ 1$^{\text{O}}$

Α. Θ. Fermat σελ. 260

Β. Ορισμός σελ 213.

Γ. α. Σωστό β Σωστό γ. Λάθος δ. Λάθος ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2$^{\text{O}}$

α. $D_f=(0,+\infty)$

$$f'(x)=2x\ln x+x^2\cdot\frac{1}{x}=2x\ln x+x=x(2\ln x+1). \quad \| \quad x>0$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=-\frac{1}{2}\Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}}=x\Leftrightarrow x=\frac{1}{\sqrt{e}}$$

Για $x>\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ είναι $f'(x)>0$

$0<x<\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ είναι $f'(x)<0$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$+\infty$
f′		-	0	+	
f		↘	ο.ε	↗	

f $\downarrow$ $\sigma\tau o$ $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και $f\uparrow \sigma\tau o \left[\dfrac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$

$$\Gamma\iota\alpha \quad x=\frac{1}{\sqrt{e}} \quad \pi\alpha\rho o\upsilon\sigma\iota\acute{\alpha}\zeta\varepsilon\iota\ \varepsilon\lambda\acute{\alpha}\chi\iota\sigma\tau o\ (o\lambda\iota\kappa\acute{o})\ \mu\varepsilon\ \tau\iota\mu\acute{\eta}\ f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=\frac{1}{e}\ln e^{-\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2e}$$

β. $f''(x)=2\ln x2+1=2\ln x+3$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow \ln x=-\frac{3}{2}\Leftrightarrow e^{-\frac{3}{2}}=x$$

f *κοίλη στο* $\left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right]$ και f *κυρτή στο* $\left[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$

	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
f''		-	+
f		$\cap$	$\cup$

ΣΚ

ΣΚ $\left(e^{-\frac{3}{2}}, f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)\right)$ $\delta\eta\lambda.$ $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$

γ. f *συν. στο* $(0, +\infty)$

$$\left[\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^2\cdot\ln x\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \underset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^3}{2x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2}{2} = 0\right]$$

Μπορείς και να μην το βρεις

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{x^2}\,\underset{\substack{\downarrow\\+\infty}}{\ln x}\right) = +\infty$$

Σ.Τ= $\left[-\frac{1}{2e}, +\infty\right)$

ΘΕΜΑ 3^{O}

α. Θεωρώ την $g(x) = e^x f(x)$

g παρ. στο $\left(0, \frac{3}{2}\right)$

g συν. στο $\left[0, \frac{3}{2}\right]$

$$\left.\begin{aligned} g(0) &= e^0 f(0) = 0 \\ g\left(\frac{3}{2}\right) &= e^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \end{aligned}\right| \; g(0) = g\left(\frac{3}{2}\right)$$

Θ. Rolle: Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$:

$$\left.\begin{array}{l} g'(\xi)=0 \\ g'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x) \end{array}\right| \Rightarrow e^{\xi} f(\xi)+e^{\xi} f'(\xi)=0$$

$$e^{\xi}\left(f(\xi)+f'(\xi)\right)=0$$

$$(e^{\xi}>0)$$

$$f(\xi)+f'(\xi)=0$$

$$f'(\xi)=-f(\xi)$$

β. $f(x)=2x^2-3x \ \| R$ $\qquad f'(x)=4x3x \ \| R$ $\qquad f''(x)=4 \ \| R$

$$I(a)=\int_a^0 e^x f(x)dx=\int_a^0 \left(e^x\right)' \cdot f(x)dx=\left[e^x f(x)\right]_a^0-\int_a^0 e^x f'(x)dx=$$

$$=-e^a f(a)-\int_a^0 \left(e^x\right)' \cdot f'(x)dx=-e^a f(a)-\left(\left[e^x \cdot f'(x)\right]_a^0-\int_a^0 e^x \cdot f''(x)dx\right)=$$

$$=-e^a f(a)-\left(f'(0)-e^a f'(a)-\int_a^0 4e^x dx\right)=$$

$$=-e^a f(a)-\left[-3-e^a(4a-3)-4\left[e^x\right]_a^0\right]=$$

$$=-e^a f(a)+3+e^a(4a-3)+4\left(e^0-e^a\right)=$$

$$=\underline{-e^a f(a)}+3+\underline{4ae^a}-\underline{3e^a}+4-\underline{4e^a}=$$

$$=-e^a f(a)+4ae^a-7e^a+7=e^a\left(-f(a)+4a-7\right)+7=$$

$$=e^a\left(-2a^2+3a+4a-7\right)+7=e^a\left(-2a^2+7a-7\right)+7$$

γ. Όταν $a \to -\infty$ τότε $e^a \to 0$

$$\lim_{a\to-\infty} I(a)=\lim_{a\to-\infty}\left[e^a\left(-2a^2+7a-7\right)+7\right]=\lim_{a\to-\infty}\left[e^a \cdot \left(-2a^2+7a-7\right)\right]+7 \overset{(0\cdot-\infty)}{=}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\left(\frac{-2a^2+7a-7}{e^{-a}}\right)+7=\lim_{a\to-\infty}\frac{-4a+7}{-e^{-a}}+7=\lim_{a\to-\infty}\frac{4a-7}{e^{-a}}+7 \overset{\frac{-\infty}{+\infty}}{=}$$

$$=\lim_{a\to-\infty}\frac{4}{-e^{-a}}+7=0+7=7$$

ΘΕΜΑ 4ο

α. Η g γράφεται: $g(x)=|z|\cdot\int_1^{x^3} f(t)dt-3\left|z+\frac{1}{z}\right|\cdot(x-1)$ και επειδή f συνεχής στο $R \Rightarrow g$ παραγωγίσημη στο R με $g'(x)=|z|\cdot f(x^3)\cdot 3x^2-3\left|z+\frac{1}{z}\right|$

β. $\left.\begin{array}{l} g(x)\geq 0 \quad \text{για κάθε } x\in R \\ g(1)=0 \end{array}\right| \Rightarrow g(x)\geq g(1), \quad x\in R$

Η g παρουσιάζει στο 1 ελάχιστο άρα (Θ. Fermat)

$$g'(1)=0 \Leftrightarrow |z|\cdot f(1)\cdot 3-3\left|z+\frac{1}{z}\right|=0 \Leftrightarrow 3|z|=3\left|z+\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z|=\left|z+\frac{1}{z}\right|$$

γ. $z^2=(a+\beta i)^2=a^2-\beta^2+2a\beta i \Rightarrow \operatorname{Re}(z^2)=a^2-\beta^2$

$$|z|=\left|z+\frac{1}{z}\right| \Leftrightarrow |z|^2=\left|z+\frac{1}{z}\right|^2 \Leftrightarrow z\bar{z}=\left(z+\frac{1}{z}\right)\left(\bar{z}+\frac{1}{\bar{z}}\right) \Leftrightarrow \frac{z^2+\bar{z}^2+1}{z\bar{z}}=0 \Leftrightarrow$$
$$z^2+\bar{z}^2+1=0 \Leftrightarrow a^2-\beta^2+2a\beta i+a^2-\beta^2-2a\beta i+1=0 \Leftrightarrow 2(a^2-\beta^2)=-1 \Leftrightarrow$$
$$a^2-\beta^2=-\frac{1}{2} \quad \delta\eta\lambda. \quad \operatorname{Re}(z^2)=-\frac{1}{2}$$

δ. f συν. στο [2, 3]

$$f(2)\cdot f(3)=a\cdot\beta<0 \qquad \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}: \quad \alpha^2-\beta^2=-\frac{1}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)<0 \\ \alpha-\beta>0\end{array}\right| \Rightarrow$$

$$\alpha+\beta<0 \Leftrightarrow \beta<-\alpha \quad \delta\eta\lambda. \quad \left.\begin{array}{l}\beta<0 \\ \alpha>0\end{array}\right| \Rightarrow \alpha\beta<0$$

Άρα (Θ. Bolzano): Υπάρχει $x_0\in(2,3): f(x_0)=0$