

## ΣΕΣΤΑΖΟΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ.

### ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

#### ΘΕΜΑ Α

- A1. Θεωρία βελ 151  
 A2. Θεωρία βελ 87  
 A3. Θεωρία βελ 14  
 A4. α)2 β)1 γ)2 δ)2 ε)1

#### ΘΕΜΑ Β

- B1. Η βάρωση  $f(x)$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f'(x) = x^2 - 5x + 6$ .  
 Μειωθίστε την παράγωγο:  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$  ή  $x = 3$ .

|         |            |              |              |            |
|---------|------------|--------------|--------------|------------|
| $x$     | $-\infty$  | $2$          | $3$          | $+\infty$  |
| $f'(x)$ | $+$        | $0$          | $-$          | $0$        |
| $f(x)$  | $\nearrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\nearrow$ |
|         |            | ΤΗ           | ΤΕ           |            |

- Η βάρωση  $f(x)$  παρουσιάζει στη θέση  $x=2$  τοπικό μέγιστο με τιμή  $f(2) = \frac{2^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{2} \cdot 4 + 12 - 1 = \frac{8}{3} - 10 + 11 = \frac{8}{3} + 1 = \frac{11}{3}$ .
- Η βάρωση  $f(x)$  παρουσιάζει στη θέση  $x=3$  τοπικό ελάχιστο με τιμή  $f(3) = \frac{3^3}{3} - \frac{5}{2} \cdot 3^2 + 6 \cdot 3 - 1 = 9 - \frac{45}{2} + 18 - 1 = 26 - \frac{45}{2} = \frac{7}{2}$ .

- B2. α' ερώτηση Έστω  $y = \lambda x + \theta$ . η εξίσωση της εφαπτομένης στο  $A(0, f(0))$  έχει  $\lambda = f'(0) = 6$ . Επομένως η εξίσωση θα είναι  $y = 6x + \theta$ .

Το σημείο επαφής είναι το  $A(0, f(0)) \rightarrow A(0, -1)$

Το σημείο  $A(0, -1)$  ανήκει στην εφαπτομένη άρα:  $-1 = 6 \cdot 0 + \theta \Leftrightarrow \theta = -1$ .

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης στο  $A(0, -1)$  είναι:  $y = 6x - 1$ .

β' ερώτηση Η εξίσωση της εφαπτομένης στο  $A(0, f(0))$  είναι:

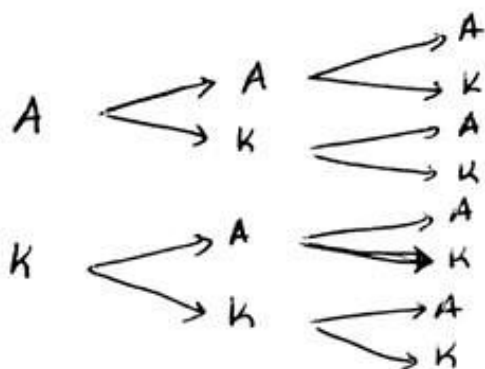
$$y - f(0) = f'(0)(x - 0)$$

$$y - (-1) = 6x \Leftrightarrow y = 6x - 1.$$

B3  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x) - 12}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x + 6 - 12}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 5x - 6}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 6)}{x + 1} = -7.$

# ΘΕΜΑ Γ

Γ1. 1<sup>ο</sup> παιδί 2<sup>ο</sup> παιδί 3<sup>ο</sup> παιδί (Ένω Α το αγόρι ευδεχόμενο ένα παιδί να είναι αγόρι και Κ κορίτσι)



Ο δυναμικός χώρος των περιστατίων είναι:

$$\Omega = \{AAA, AAK, AK A, AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\}$$

$$\Gamma_2 = \{KAA, KAK, KKA, KKK\}$$

$$B = \{AKK, KAK, KKA, KKK\}$$

$$\Gamma = \{AAA, AAK, KKA, KKK\}$$

Γ3 Τα ευδεχόμενα είναι

$$\Delta = \{KAK, KKA, KKK\}$$

$$E = \{KAA, KAK, KKA, KKK, AKK\}$$

$$Z = \{AAA, AAK\}$$

α) Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας θα έχουμε:

$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}, \quad P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{5}{8}, \quad P(Z) = \frac{N(Z)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$\beta) P(H) = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(E) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$$

$$\begin{aligned} P(\Theta) &= P[(A-B) \cup (B-A)] = P(A-B) + P(B-A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) \\ &= P(A \cup B) - P(A \cap B) \\ &= P(E) - P(\Delta) = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Δ1. Έστω  $a$  η μικρότερη παρατήρηση του δείγματος και  $c$  το πλάτος των κλάσεων. Ο πίνακας γίνεται:

| κλάσεις        | κεντρική τιμή $x_i$ | Συχνότητα $v_i$ |
|----------------|---------------------|-----------------|
| $[a, a+c)$     | $a + \frac{c}{2}$   | 20              |
| $[a+c, a+2c)$  | $a + \frac{3c}{2}$  | 15              |
| $[a+2c, a+3c)$ | $a + \frac{5c}{2}$  | 10              |
| $[a+3c, a+4c)$ | $a + \frac{7c}{2}$  | $v_4$           |
| Σύνολο         | //////              | $v =$           |

Από τη σύγκριση των τιμών με τα δεδομένα του δοθέντα πίνακα προκύπτει ότι:  
 $a = b^{(1)}$  και  $a + \frac{3c}{2} = 14^{(2)}$

Η σχέση (2) από (1):  $b + \frac{3c}{2} = 14$   
 $\Leftrightarrow \frac{3c}{2} = 6 \Leftrightarrow c = 4$

Δ2. Για  $a = b$  και  $c = 4$  ο πίνακας γίνεται:

| χρόνος (σε λεπτά) | κεντρική τιμή $x_i$ | Συχνότητα $v_i$ | $x_i v_i$     |
|-------------------|---------------------|-----------------|---------------|
| $[8, 12)$         | 10                  | 20              | 200           |
| $[12, 16)$        | 14                  | 15              | 210           |
| $[16, 20)$        | 18                  | 10              | 180           |
| $[20, 24)$        | 22                  | $v_4$           | $22v_4$       |
| //////            | //////              | $45 + v_4$      | $590 + 22v_4$ |

Η μέση τιμή των παρατηρήσεων δίνεται από τον τύπο:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i v_i}{v} \Leftrightarrow 14 = \frac{590 + 22v_4}{45 + v_4} \Leftrightarrow 630 + 14v_4 = 590 + 22v_4$$

$$\Leftrightarrow 40 = 8v_4 \Leftrightarrow v_4 = 5$$

Δ3. Τουλάχιστον 9 λεπτά χρειάστηκαν.  $\frac{3}{4}v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 15 + 15 + 10 + 5 = 45$   
 υπολογισμός

Δ4. Η διακύμανση των παρατηρήσεων δίνεται από τον τύπο

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 v_1 + (x_2 - \bar{x})^2 v_2 + (x_3 - \bar{x})^2 v_3 + (x_4 - \bar{x})^2 v_4}{v}$$

$$= \frac{(10 - 14)^2 \cdot 20 + (14 - 14)^2 \cdot 15 + (18 - 14)^2 \cdot 10 + (22 - 14)^2 \cdot 5}{50}$$

$$= \frac{16 \cdot 20 + 0 \cdot 15 + 16 \cdot 10 + 64 \cdot 5}{50} = \frac{320 + 160 + 320}{50} = \frac{800}{50} = 16$$

Η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων είναι  $s = \sqrt{s^2} = 4$ .  
και ο συντελεστής μεταβολής (μεταβλητότητας) είναι  
 $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{4}{14} \cdot 100\% \approx 28,6\%$ . Επειδή  $CV > 10\%$  άρα  
το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δσ: Έστω  $x_i$  οι αρχικές παρατηρήσεις του δείγματος και  $y_i$   
οι νέες παρατηρήσεις. Ισχύει ότι  $y_i = \frac{80}{100} x_i = 0,8x_i$ .

Η νέα μέση τιμή των παρατηρήσεων θα είναι  
 $\bar{y} = 0,8\bar{x}$  και η νέα τυπική απόκλιση θα είναι  
 $s_y = 1981s_x = 0,8s_x$ . Σύμφωνα με την εφαρμογή του  
βιβλίου. Άρα ο νέος συντελεστής μεταβολής θα  
είναι  $CV_y = \frac{s_y}{|\bar{y}|} = \frac{0,8s_x}{0,8\bar{x}} = \frac{s_x}{\bar{x}} = 28,6\%$

Άρα ούτε το νέο δείγμα των παρατηρήσεων είναι  
ομοιογενές.