ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑ.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ 151

Α2. Θεωρία σελ 87

Α3. Θεωρία σελ 14

Α4. α) Σ β) Λ γ) Σ δ) Σ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=x^2-5x+6$

Μηδενίζουμε την παράγωγο: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=3$.

| $x$ | $-\infty$ | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |
| $f(x)$ | | ↗ | Τ.Μ | ↘ | Τ.Ε | ↗ | |

• Η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει στη θέση $x=2$ τοπικό μέγιστο με τιμή $f(2)=\frac{2^3}{3}-\frac{5}{2}2^2+6\cdot 2-1=\frac{8}{3}-\frac{5}{2}4+12-1=\frac{8}{3}-10+11=\frac{8}{3}+1=\frac{11}{3}$.

• Η συνάρτηση $f(x)$ παρουσιάζει στη θέση $x=3$ τοπικό ελάχιστο με τιμή $f(3)=\frac{3^3}{3}-\frac{5}{2}3^2+6\cdot 3-1=9-\frac{45}{2}+18-1=26-\frac{45}{2}=\frac{7}{2}$

Β2. <u>α' τρόπος</u> Έστω $y=\lambda x+\beta$ η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(0,f(0))$

Ισχύει $\lambda=f'(0)=6$. Επομένως η εξίσωση θα είναι $y=6x+\beta$.

Το σημείο επαφής είναι το $A(0,f(0)) \rightarrow A(0,-1)$

Το σημείο $A(0,-1)$ ανήκει στην εφαπτομένη άρα: $-1=6\cdot 0+\beta \Leftrightarrow \beta=-1$.

Επομένως η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(0,-1)$ είναι $y=6x-1$.

<u>β' τρόπος</u> Η εξίσωση της εφαπτομένης στο $A(0,f(0))$ είναι:

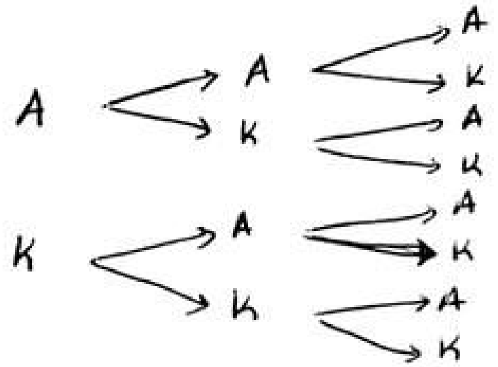
$$y-f(0)=f'(0)(x-0)$$

$$y-(-1)=6x \Leftrightarrow y=6x-1.$$

Β3 $\lim_{x\to -1}\frac{f'(x)-12}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x+6-12}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x-6}{x+1}=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-6)}{\cancel{x+1}}=-7.$

## Θέμα Γ

**Γ1.** 1º παιδί  2º παιδί  3º παιδί (Έστω Α το απλό ενδεχόμενο ένα παιδί να είναι αγόρι και Κ κορίτσι)




Ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι:

$\Omega = \{AAA, AAK, AKA, AKK, KAA, KAK, KKA, KKK\}$

**Γ2.** $A = \{KAA, KAK, KKA, KKK\}$

$B = \{AKK, KAK, KKA, KKK\}$

$\Gamma = \{AAA, AAK, KKA, KKK\}$

**Γ3.** Τα ενδεχόμενα είναι

- $\Delta = \{KAK, KKA, KKK\}$
- $E = \{KAA, KAK, KKA, KKK, AKK\}$
- $Z = \{AAA, AAK\}$

α) Από τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας θα έχουμε:

$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{3}{8}$, $P(E) = \frac{N(E)}{N(\Omega)} = \frac{5}{8}$, $P(Z) = \frac{N(Z)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

β) $P(H) = P[(A \cup B)'] = 1 - P(A \cup B) = 1 - P(E) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

$$\begin{aligned} P(\Theta) = P[(A-B) \cup (B-A)] &= P(A-B) + P(B-A) \\ &= P(A) - P(A \cap B) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) - P(A \cap B) \\ &= P(A \cup B) - P(A \cap B) \\ &= P(E) - P(\Delta) = \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Δ1. Έσω $a$ η μικρότερη παρατήρηση του δείγματος και $c$ το πλάτος των κλάσεων. Ο πίνακας γίνεται:

| Κλάσεις | Κεντρική τιμή $x_i$ | Συχνότητα $v_i$ |
|---|---|---|
| $[a, a+c)$ | $a+\frac{c}{2}$ | 20 |
| $[a+c, a+2c)$ | $a+\frac{3c}{2}$ | 15 |
| $[a+2c, a+3c)$ | $a+\frac{5c}{2}$ | 10 |
| $[a+3c, a+4c)$ | $a+\frac{7c}{2}$ | $v_4$ |
| Σύνολο | ////////// | $v=$ |

Από τη σύγκριση των τιμών με τα δεδομένα του δοθέντα πίνακα προκύπτει ότι:

$a=8^{(1)}$ και $a+\frac{3c}{2}=14^{(2)}$

Η σχέση (2) από (1): $8+\frac{3c}{2}=14$

$\Leftrightarrow \frac{3c}{2}=6 \Leftrightarrow c=4$.

Δ2. Για $a=8$ και $c=4$ ο πίνακας γίνεται:

| Χρόνος (σε λεπτά) | Κεντρική τιμή $x_i$ | Συχνότητα $v_i$ | $x_i v_i$ |
|---|---|---|---|
| $[8, 12)$ | 10 | 20 | 200 |
| $[12, 16)$ | 14 | 15 | 210 |
| $[16, 20)$ | 18 | 10 | 180 |
| $[20, 24)$ | 22 | $v_4$ | $22v_4$ |
| ////////// | ////////// | $45+v_4$ | $590+22v_4$ |

Η μέση τιμή των παρατηρήσεων δίνεται από τον τύπο:

$\bar{x}=\frac{\Sigma x_i v_i}{v} \Leftrightarrow 14=\frac{590+22v_4}{45+v_4} \Leftrightarrow 630+14v_4=590+22v_4$

$\Leftrightarrow 40=8v_4 \Leftrightarrow v_4=5$.

Δ3. Τουλάχιστον 9 λεπτά χρειάστηκαν: $\frac{3}{4}v_1+v_2+v_3+v_4=15+15+10+5=45$ υπολογιστές

Δ4. Η διακύμανση των παρατηρήσεων δίνεται από τον τύπο

$$s^2=\frac{\Sigma(x_i-\bar{x})^2 v_i}{v}=\frac{(x_1-\bar{x})^2v_1+(x_2-\bar{x})^2v_2+(x_3-\bar{x})^2v_3+(x_4-\bar{x})^2v_4}{v}$$

$$=\frac{(10-14)^2\cdot 20+(14-14)^2\cdot 15+(18-14)^2\cdot 10+(22-14)^2\cdot 5}{50}$$

$$=\frac{16\cdot 20+0\cdot 15+16\cdot 10+64\cdot 5}{50}=\frac{320+160+320}{50}=\frac{800}{50}=16$$

Η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων είναι $s=\sqrt{s^2}=4$.
και ο συντελεστής μεταβολής (μεταβλητότητας) είναι
$CV=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{4}{14}\cdot 100\% \simeq 28,6\%$. Επειδή $CV>10\%$ άρα
το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Δ5: Έστω $x_i$ οι αρχικές παρατηρήσεις του δείγματος και $y_i$ οι νέες παρατηρήσεις. Ισχύει ότι $y_i=\frac{80}{100}x_i=0,8x_i$.
Η νέα μέση τιμή των παρατηρήσεων θα είναι
$\bar{y}=0,8\bar{x}$ και η νέα τυπική απόκλιση θα είναι
$s_y=|0,8|s_x=0,8s_x$. σύμφωνα με την εφαρμογή του βιβλίου. Άρα ο νέος συντελεστής μεταβολής θα είναι $CV_y=\frac{s_y}{|\bar{y}|}=\frac{\cancel{0,8}s_x}{\cancel{0,8}\bar{x}}=\frac{s_x}{\bar{x}}\simeq 28,6\%$

Άρα ούτε το νέο δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.