Το ΠΡΩΤΟ φροντιστήριο

ΕΙΔΙΚΟ ΓΙΑ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΕΣ ΣΧΟΛΕΣ ΚΑΙ ΕΛ.ΑΣ.

Εθνικής Αμύνης 34, 546 21 ΘΕΣ/ΝΙΚΗ

Τηλ./Fax: 2310 277801 - 2310 278201

www.frontistirioproto.gr

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ

ΜΑΘΗΜΑ: .... ΤΜΗΜΑ: ....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ....

ΒΑΘΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. σελ 31

Α2. σελ 22

Α3. σελ 86

Α4. α) Λ β) Σ γ) Λ δ) Λ ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Είναι $(3x-1)(8x^2-6x+1)=0 \Leftrightarrow 3x-1=0$ ή $8x^2-6x+1=0$

$x=\frac{1}{3}$ $\quad\Delta=36-32=4$

$x_{1,2}=\frac{6\pm 2}{16} \left\langle \begin{array}{l}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}\end{array}\right.$

Επειδή $A\cap B \subseteq A \subseteq A\cup B \Rightarrow P(A\cap B)\leq P(A)\leq P(A\cup B)$

Όμως $P(A\cap B), P(A), P(A\cup B) \in \left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$

επομένως $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$, $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$

Β2. $P(A'-B')=P(A')-P(A'\cap B')=1-P(A)-P[(A\cup B)']=1-P(A)-(1-P(A\cup B))$

$=1-P(A)-1+P(A\cup B)=\cancel{1}-\frac{1}{3}-\cancel{1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$.

Ισχύει επίσης $P(\Delta)=P[(A\cap B)']=1-P(A\cap B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

Β3. Η πιθανότητα να πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β είναι:

$P(\Delta)=P[(A-B)\cup(B-A)]$ Τα ενδεχόμενα $A-B$ και $B-A$ είναι ασυμβίβαστα άρα από τον απλό προσθετικό νόμο θα έχουμε:

$P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$

$=P(A\cup B)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

Β4. Από τον προσθετικό νόμο έχουμε: $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+P(B)-\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(B)=\frac{5}{12}$

Λύνουμε την εξίσωση $9x^2-3x-2=0$.

Είναι $\Delta=9+72=81$

$$x_{1,2}=\frac{3\pm 9}{18}=\begin{cases}\frac{12}{18}=\frac{2}{3}\\ -\frac{6}{18}=-\frac{1}{3}.\end{cases}$$

Επειδή όμως $P(\Gamma)\geq 0$ άρα θα έχουμε $P(\Gamma)=\frac{2}{3}$.

Έστω ότι τα ενδεχόμενα Β, Γ είναι ασυμβίβαστα.
Από τον απλό προσθετικό νόμο θα έχουμε:

$$P(B\cup\Gamma)=P(B)+P(\Gamma)=\frac{5}{12}+\frac{2}{3}=\frac{5}{12}+\frac{8}{12}=\frac{13}{12}>1 \text{ αδύνατο.}$$

Άρα τα ενδεχόμενα Β, Γ δεν είναι ασυμβίβαστα.

ΘΕΜΑ Γ

Από τα δεδομένα έχουμε ότι:

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%.
  Επομένως $f_1\%=10\%$
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%. Επομένως $f_5\%=30\%$
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην $3^{η}$ κλάση είναι $108°$.

Επομένως $a_3=108° \Leftrightarrow f_3\cdot 360\% = 108\% \Leftrightarrow f_3=\frac{108}{360} \Leftrightarrow f_3 =0{,}3 \Leftrightarrow$

$f_3\%=30\%$

- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων είναι $\bar{x}=14$. Επομένως θα έχουμε:

$$\bar{x}=14 \Leftrightarrow \frac{\sum x_i f_i\%}{100}=14 \Leftrightarrow x_1f_1\%+x_2f_2\%+x_3f_3\%+x_4f_4\%+x_5f_5\%=1400$$
$$\Leftrightarrow 9\cdot 10+11\cdot f_2\%+13\cdot 30+15f_4\%+17\cdot 30=1400$$
$$\Leftrightarrow 90+11f_2\%+390+15f_4\%+510=1400$$
$$\Leftrightarrow 11f_2\%+15f_4\%=410 \quad (1)$$

Ξέρουμε όμως ότι $\sum_{i=1}^{5} f_i\%=100 \Leftrightarrow f_1\%+f_2\%+f_3\%+f_4\%+f_5\%=100$
$$\Leftrightarrow 10+f_2\%+30\%+f_4\%+30\%=100$$
$$\Leftrightarrow f_2\%+f_4\%=30 \quad (2)$$

Εθνικής Αμύνης 34, 546 21 ΘΕΣ/ΝΙΚΗ
Τηλ./Fax: 2310 277801 - 2310 278201
www.frontistirioproto.gr

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΜΑΘΗΜΑ: ΤΜΗΜΑ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

ΒΑΘΜΟΣ

Λύνουμε το σύστημα που προκύπτει από τις σχέσεις (1), (2)

$$\begin{cases} 11f_2\% + 15f_4\% = 410 \\ f_2\% + f_4\% = 30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11f_2\% + 15f_4\% = 410 \\ f_2\% = 30 - f_4\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11(30 - f_4\%) + 15f_4\% = 410 \\ f_2\% = 30 - f_4\% \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 330 - 11f_4\% + 15f_4\% = 410 \\ f_2\% = 30 - f_4\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4f_4\% = 80 \\ f_2\% = 30 - f_4\% \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f_4\% = 20\% \\ f_2\% = 10\% \end{cases}$$

Ο πίνακας Ι γίνεται:

κλάσεις	x_i	$f_i\%$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i\%$
[8, 10)	9	10	−5	25	250
[10, 12)	11	10	−3	9	90
[12, 14)	13	30	−1	1	30
[14, 16)	15	20	1	1	20
[16, 18)	17	30	3	9	270
Σύνολο		100			660

Γ2. Η διακύμανση των δεδομένων δίνεται από τον τύπο.

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \frac{\sum_{i=1}^{5}(x_i - \bar{x})^2 f_i\%}{100} = \frac{660}{100} = 6,6$$

Η τυπική απόκλιση θα είναι $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6,6} = 2,57$.

Ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος θα είναι:

$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2,57}{14} \simeq 0,183 \cdot 100\% = 18,3 > 10\%$ επομένως το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Γ3. Είναι $\sum_{i=1}^{4} x_i v_i = 1780 \overset{:v}{\Leftrightarrow} x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4 = 1780$

$$\Leftrightarrow \frac{x_1v_1+x_2v_2+x_3v_3+x_4v_4}{v} = \frac{1780}{v}$$

$$\Leftrightarrow x_1f_1+x_2f_2+x_3f_3+x_4f_4 = \frac{1780}{v}$$

$$\Leftrightarrow 9\cdot 0{,}10 + 11\cdot 0{,}10 + 13\cdot 0{,}3 + 15\cdot 0{,}2 = \frac{1780}{v}$$

$$\Leftrightarrow 0{,}9 + 1{,}1 + 3{,}9 + 3 = \frac{1780}{v}$$

$$\Leftrightarrow 8{,}9 = \frac{1780}{v} \Leftrightarrow v = \frac{1780}{8{,}9} \Leftrightarrow v = 200$$

Γ4.

Είναι $\bar{b} = \frac{b_1+b_2+b_3+b_4+b_5}{5} = \frac{\frac{a_1-\bar{a}}{s_a}+\frac{a_2-\bar{a}}{s_a}+\frac{a_3-\bar{a}}{s_a}+\frac{a_4-\bar{a}}{s_a}+\frac{a_5-\bar{a}}{s_a}}{5}$

$$= \frac{a_1-\bar{a}+a_2-\bar{a}+a_3-\bar{a}+a_4-\bar{a}+a_5-\bar{a}}{5s_a} =$$

$$= \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5}{5s_a} - \frac{\cancel{5}\bar{a}}{\cancel{5}s_a} = \frac{\bar{a}}{s_a} - \frac{\bar{a}}{s_a} = 0.$$

Η διακύμανση των παρατηρήσεων b_i είναι:

$$s_b^2 = \frac{\sum_{i=1}^{5}(b_i-\bar{b})^2}{5} = \frac{(b_1-\bar{b})^2+(b_2-\bar{b})^2+(b_3-\bar{b})^2+(b_4-\bar{b})^2+(b_5-\bar{b})^2}{5}$$

$$= \frac{b_1^2+b_2^2+b_3^2+b_4^2+b_5^2}{5} = \frac{\left(\frac{a_1-\bar{a}}{s_a}\right)^2+\left(\frac{a_2-\bar{a}}{s_a}\right)^2+\left(\frac{a_3-\bar{a}}{s_a}\right)^2+\left(\frac{a_4-\bar{a}}{s_a}\right)^2+\left(\frac{a_5-\bar{a}}{s_a}\right)^2}{5}$$

$$= \frac{\frac{(a_1-\bar{a})^2}{s_a^2}+\frac{(a_2-\bar{a})^2}{s_a^2}+\frac{(a_3-\bar{a})^2}{s_a^2}+\frac{(a_4-\bar{a})^2}{s_a^2}+\frac{(a_5-\bar{a})^2}{s_a^2}}{5}$$

$$= \frac{(a_1-\bar{a})^2+(a_2-\bar{a})^2+(a_3-\bar{a})^2+(a_4-\bar{a})^2+(a_5-\bar{a})^2}{5s_a^2} = \frac{s_a^2}{s_a^2} = 1$$ Άρα $s_b = \sqrt{1} = 1$

Το ΠΡΩΤΟ φροντιστήριο

ΕΙΔΙΚΟ ΓΙΑ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΕΣ ΣΧΟΛΕΣ ΚΑΙ ΕΛ.ΑΣ.

Εθνικής Αμύνης 34, 546 21 ΘΕΣ/ΝΙΚΗ

Τηλ./Fax: 2310 277801 - 2310 278201

www.frontistirioproto.gr

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ: ....

ΜΑΘΗΜΑ: .... ΤΜΗΜΑ: ....

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ....

ΒΑΘΜΟΣ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Στο τρίγωνο $B\hat{A}\Delta$ ($A = 1L$) χρησιμοποιούμε το πυθαγόρειο θεώρημα: $B\Delta^2 = AB^2 + A\Delta^2 \Leftrightarrow 100 = AB^2 + A\Delta^2 \Leftrightarrow A\Delta^2 = 100 - x^2$
$\Leftrightarrow A\Delta = \sqrt{100-x^2}$ με $100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow 100 > x^2 \Leftrightarrow 10 > |x| \Leftrightarrow -10 < x < 10$
και επειδή $x > 0$ (μήκος πλευράς) άρα $0 < x < 10$.

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο
$f(x) = AB \cdot A\Delta = x \cdot \sqrt{100-x^2}$ $\quad 0 < x < 10$.

Δ2 Θα μελετήσουμε τη συνάρτηση αυτή ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. Η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $(0,10)$ με:

$$f'(x) = (x)'\sqrt{100-x^2} + x\cdot\left(\sqrt{100-x^2}\right)' = \sqrt{100-x^2} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{100-x^2}}\cdot(100-x^2)'$$

$$= \sqrt{100-x^2} - x\cdot\frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{100-x^2}} = \sqrt{100-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{100-x^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{100-x^2}^{\,2} - x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100-x^2}} = \frac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}}$$

Μηδενίζουμε την παράγωγο και θα έχουμε:
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{100-2x^2}{\sqrt{100-x^2}} = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 100 \Leftrightarrow$
$x^2 = 50 \Leftrightarrow x = \sqrt{50}$. Ο πίνακας μονοτονίας της συνάρτησης είναι:

x	0		$\sqrt{50}$		10
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

Τ.Μ(Ο.Μ): $f(\sqrt{50})$

Παρατηρούμε από τον πίνακα ότι το εμβαδόν γίνεται μέγιστο όταν $x=\sqrt{50}$. Για $x=\sqrt{50}$ η πλευρά ΑΔ γίνεται:

$$A\Delta = \sqrt{100-\sqrt{50}^2} = \sqrt{100-50} = \sqrt{50} = AB$$

Άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο

Δ3 Το όριο γίνεται: $\lim_{x\to 0} \frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(1+x)\sqrt{100-(x+1)^2} - \sqrt{99}}{98x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[(1+x)\sqrt{100-(x+1)^2} - \sqrt{99}\right]\left[(1+x)\sqrt{100-(x+1)^2} + \sqrt{99}\right]}{98x\cdot\left[(1+x)\sqrt{100-(x+1)^2} + \sqrt{99}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^2\cdot\sqrt{100-(x+1)^2}^2 - \sqrt{99}^2}{98x\left[(x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x+1)^2\cdot\left[100-(x+1)^2\right] - 99}{98x\cdot\left[(x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(x^2+2x+1)(-x^2-2x+99) - 99}{98x\cdot\left[(x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}\right]} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^4-2x^3+99x^2-2x^3-4x^2+198x-x^2-2x+99-99}{98x\left[(x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}\right]}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-x^4-4x^3+94x^2+196x}{98x\cdot\left[(x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}\right]} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(-x^3-4x^2+94x+196)}{98\cancel{x}\left[(x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}\right]} =$$

$$= \frac{196}{98\cdot 2\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{99}} = \frac{\sqrt{99}}{99}$$

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΜΑΘΗΜΑ: ΤΜΗΜΑ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

ΒΑΘΜΟΣ

Δ4 Γνωρίζουμε ότι $P(A-B) \le P(A)$ (αφού $A-B \subseteq A$)
Οι τιμές $P(A-B), P(A)$ ανήκουν στο διάστημα $(0, \sqrt{50})$ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα. Επομένως θα ισχύει:

$$f(P(A-B)) \le f(P(A)) \Leftrightarrow P(A-B)\sqrt{100-P^2(A-B)} \le P(A)\sqrt{100-P^2(A)}$$
$$\Leftrightarrow \frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}} \le \frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}$$

Προφανώς $\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}, \frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A+B)}} \in (0, \sqrt{50})$ στο οποίο η f είναι γνησίως αύξουσα άρα:

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100-P^2(A)}}\right) \le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100-P^2(A-B)}}\right)$$