ΤΟ ΠΡΩΤΟ φροντιστήριο
ΕΙΔΙΚΟ ΓΙΑ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΕΣ ΣΧΟΛΕΣ ΚΑΙ ΕΛ.ΑΣ.
Εθνικής Αμύνης 34, 546 21 ΘΕΣ/ΝΙΚΗ
Τηλ./Fax: 2310 277801 - 2310 278201
www.frontistirioproto.gr

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΜΑΘΗΜΑ: ΤΜΗΜΑ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

ΒΑΘΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ 28.

Α2. Ορισμός σελ 14.

Α3. Ορισμός σελ 87.

Α4. Λ, Σ, Λ, Λ, Λ

ΘΕΜΑ Β

Β1 $P(\omega_1) = -\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{(\sqrt{x^2+x+1}-1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)}$

$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}^2-1^2}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x}{x^2(x+1)(\sqrt{x^2+x+1}+1)} =$

$= -\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x\cancel{(x+1)}}{x^2\cancel{(x+1)}(\sqrt{x^2+x+1}+1)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{2} = \frac{1}{4}.$

- $P(\omega_3) = f'(1)$ όπου $f(x) = \frac{1}{3}(\ln x+1)$ Άρα $P(\omega_3) = \frac{1}{3}.$

Β2. Από τον αξιωματικό ορισμό έχουμε ότι:

$P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4) = 1 \Leftrightarrow$

$P(\omega_2)+P(\omega_4)+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow$

$P(\omega_2)+P(\omega_4)+\frac{7}{12} = 1 \Leftrightarrow$

$P(\omega_2)+P(\omega_4) = \frac{5}{12}$

Είναι $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$ επομένως $P(A')=P(\omega_2)+P(\omega_3)=P(\omega_2)+\frac{1}{3}$.

Η ζητούμενη σχέση γίνεται: $\frac{1}{3}\le P(\omega_2)+\frac{1}{3}\le\frac{3}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\le P(\omega_2)+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\le\frac{3}{4}$

$\Leftrightarrow 0\le P(\omega_2)\le\frac{5}{12}$ το οποίο ισχύει και $P(\omega_2)=\frac{5}{12}-P(\omega_4)$)

B_3 Αν $P(A')=\frac{3}{4}$ τότε από το προηγούμενο ερώτημα θα

έχουμε: $P(\omega_2)+\frac{1}{3}=\frac{3}{4}\Leftrightarrow P(\omega_2)=\frac{5}{12}$.

Από τη σχέση $P(\omega_2)+P(\omega_4)=\frac{5}{12}\Rightarrow P(\omega_4)=0$.

- Το ενδεχόμενο $A-B=\{\omega_4\}$.
  Το ενδεχόμενο $B-A=\{\omega_3\}$.
  Επομένως το ενδεχόμενο $(A-B)\cup(B-A)$ είναι το ενδεχόμενο $\{\omega_3,\omega_4\}$
  με $P[(A-B)\cup(B-A)]=P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$.

- Το ενδεχόμενο $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$.
  Το ενδεχόμενο $B'=\{\omega_2,\omega_4\}$.
  Επομένως το ενδεχόμενο $A'-B'$ είναι το ενδεχόμενο $\{\omega_3\}$ με
  $P(A'-B')=P(\omega_3)=\frac{1}{3}$

ΘΕΜΑ Γ: Ο πίνακας με τη βοήθεια των δεδομένων είναι:

Γ1

κλάσεις	x_i	f_i
[50,)		f_1
		f_2
		f_3
	85	f_4
Σύνολο	/////	1

Η θεωρητική μορφή των κλάσεων είναι:

κλάσεις	x_i
$[a,a+c)$	$a+\frac{c}{2}$
$[a+c,a+2c)$	$a+\frac{3c}{2}$
$[a+2c,a+3c)$	$a+\frac{5c}{2}$
$[a+3c,a+4c)$	$a+\frac{7c}{2}$

Άρα θα έχουμε

$$\begin{cases}a=50\\a+\frac{7c}{2}=85\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=50\\50+\frac{7c}{2}=85\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=50\\\frac{7c}{2}=35\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=50\\c=10\end{cases}$$

Ο πίνακας λοιπόν γίνεται:

Το ΠΡΩΤΟ φροντιστήριο

ΕΙΔΙΚΟ ΓΙΑ ΣΤΡΑΤΙΩΤΙΚΕΣ ΣΧΟΛΕΣ ΚΑΙ ΕΛ.ΑΣ.

Εθνικής Αμύνης 34, 546 21 ΘΕΣ/ΝΙΚΗ

Τηλ./Fax: 2310 277801 - 2310 278201

www.frontistirioproto.gr

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΜΑΘΗΜΑ: ΤΜΗΜΑ:

ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:

ΒΑΘΜΟΣ

κλάσεις	x_i	f_i	$x_i f_i$
[50,60)	55	f_1	$55f_1$
[60,70)	65	f_2	$65f_2$
[70,80)	75	f_3	$75f_3$
[80,90)	85	f_4	$85f_4$
Σύνολο	/////	1	

· Είναι $\Sigma f_i = 1 \Rightarrow f_1+f_2+f_3+f_4=1$ (1).

· Η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης άρα $f_4 = 2f_3$ (2)

· Η διάμεσος των παρατηρήσεων είναι $\delta = 75$ επομένως:

$f_1+f_2+\frac{1}{2}f_3 = \frac{1}{2}f_3 + f_4 \Leftrightarrow f_1+f_2 = f_4$ (3).

· Η μέση τιμή είναι $\bar{x} = 74$ επομένως $\Sigma x_i f_i = 74 \Leftrightarrow$

$55f_1+65f_2+75f_3+85f_4 = 74$ (4).

Από τις σχέσεις (1),(2),(3) θα έχουμε: $f_1+f_2+f_3+f_4 = 1$.

$2f_3+f_3+2f_3 = 1 \Leftrightarrow$

$5f_3 = 1 \Leftrightarrow f_3 = 0,2$ (5).

Από τις σχέσεις (2),(5) θα είναι $f_4 = 2f_3 = 0,4$ (6).

Από τις σχέσεις (3),(5),(6) θα είναι $f_1+f_2 = 0,4$. (7).

Από τις σχέσεις (4),(5),(6) θα είναι: $55f_1+65f_2+15+34 = 74 \Leftrightarrow$

$55f_1+65f_2 = 25$ (8)

Από τις σχέσεις (7),(8) θα έχουμε.

$$(-55)\begin{cases} f_1+f_2 = 0,4 \\ 55f_1+65f_2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{55f_1}-55f_2 = 22 \\ \cancel{55f_1}+65f_2 = 25 \end{cases}$$

$10f_2 = 3 \Rightarrow f_2 = 0,3$. Άρα από (7) $f_1 = 0,1$

Άρα ο πίνακας θα είναι

κλάσεις	x_i	f_i
[50,60)	55	0,10
[60,70)	65	0,30
[70,80)	75	0,20
[80,90)	85	0,40
Σύνολο		1

Γ3. Το νέο δείγμα των παρατηρήσεων θα είναι.

κλάσεις	x_i	f_i
[50,60)	55	f_1
[60,70)	65	f_2
[70,80)	75	f_3
Σύνολο		1

Από τα προηγούμενα ερωτήματα παρατηρούμε ότι $f_2 = 3f_1$ και $f_3 = 2f_1$

Επίσης ισχύει ότι $f_1 + f_2 + f_3 = 1 \Leftrightarrow$

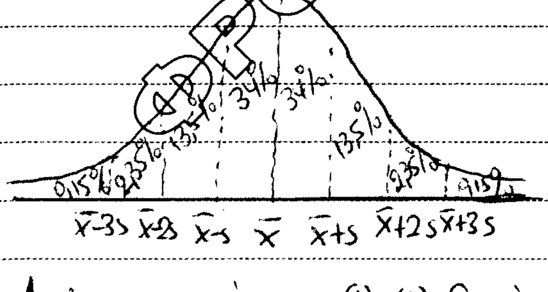
$\Leftrightarrow f_1 + 3f_1 + 2f_1 = 1 \Leftrightarrow 6f_1 = 1 \Leftrightarrow f_1 = \frac{1}{6}$.

Άρα $f_2 = 3f_1 = \frac{1}{2}$ και $f_3 = 2f_1 = \frac{1}{3}$.

Η μέση τιμή είναι $\bar{x} = x_1 f_1 + x_2 f_2 + x_3 f_3 = 55 \cdot \frac{1}{6} + 65 \cdot \frac{1}{2} + 75 \cdot \frac{1}{3} =$

$= \frac{55}{6} + \frac{65}{2} + \frac{75}{3} = \frac{55 + 195 + 150}{6} = \frac{400}{6} = \frac{200}{3}$.

Γ4. Η καμπύλη της κανονικής κατανομής είναι.



Το 2,5% των παρατηρήσεων είναι τουλάχιστον 74

άρα $\bar{x} + 2s = 74$ (1)

Το 16% των παρατηρήσεων είναι το πολύ 68

άρα $\bar{x} - s = 68$ (2).

Από τις σχέσεις (1),(2) θα έχουμε

$$\begin{cases} \bar{x} + 2s = 74 \\ \bar{x} - s = 68 \quad (-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} + 2s = 74 \\ -\bar{x} + s = -68 \end{cases}$$

$3s = 6 \Leftrightarrow s = 2$.

Από την εξίσωση $\bar{x} - s = 68 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \bar{x} - 2 = 68 \Leftrightarrow \bar{x} = 70$.

Άρα $CV = \frac{2}{70} 100\% \simeq 3\% < 10\%$

άρα ομοιογενές

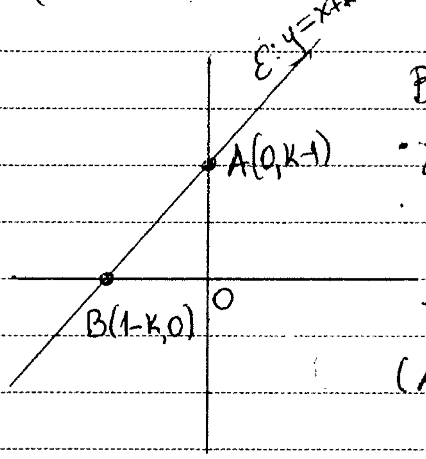
ΘΕΜΑ Δ

Δ1 Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)$ στο σημείο $(1, f(1))$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)$$

όπου $f'(x)=\ln x+1$ και $f(1)=\kappa$, $f'(1)=1$.

Άρα θα είναι η ευθεία: $y-\kappa=x-1 \Leftrightarrow y=x+\kappa-1$.



Βρίσκουμε τα σημεία τομής με τους άξονες.

- για $x=0$ $y=\kappa-1$ $A(0,\kappa-1)$
- για $y=0$ $x=1-\kappa$ $B(1-\kappa,0)$

Το εμβαδόν του τριγώνου $A\hat{O}B$ θα είναι

$$(A\hat{O}B)=\frac{1}{2}OA\cdot OB=\frac{1}{2}|\kappa-1|\cdot|\kappa-1|=\frac{(\kappa-1)^2}{2},\ \kappa>1$$

Ισχύει όμως ότι $E<2 \Leftrightarrow (\kappa-1)^2<4 \Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa+1<4 \Leftrightarrow \kappa^2-2\kappa-3<0$.

Ο πίνακας προσήμου του τριωνύμου είναι:

κ	1	3	$+\infty$
$\kappa^2-2\kappa-3$	$-$	0	$+$

Επομένως $\kappa\in(1,3)$. Όμως $\kappa\in\mathbb{Z}$ άρα $\kappa=2$

Η συνάρτηση λοιπόν είναι $f(x)=x\ln x+2$ και η εφαπτομένη στο 1 θα είναι $y=x+1$.

Δ2 α) Έστω $x_1, \dots, x_{50}$ οι τετμημένες 50 σημείων της εφαπτομένης όπου $y_i=x_i+1$ θα είναι $\bar{y}=\bar{x}+1 \Leftrightarrow 31=\bar{x}+1 \Leftrightarrow \bar{x}=30$.

β) Οι νέες τετμημένες θα είναι: $x_1+3, \dots, x_{20}+3, x_{21}, \dots, x_{35}, x_{36}-\lambda, \dots, x_{50}-\lambda$.

Η νέα μέση τιμή των παρατηρήσεων θα είναι:

$$\bar{x}' = \frac{x_1+3+\dots+x_{20}+3+x_{21}+\dots+x_{35}+x_{36}-\lambda+\dots+x_{50}-\lambda}{50} \Leftrightarrow$$

$$31 = \frac{60-15\lambda+x_1+x_2+\dots+x_{50}}{50} \Leftrightarrow 1550 = 60-15\lambda+x_1+\dots+x_{50} \quad (1)$$

Όμως $\bar{x}=30 \Leftrightarrow \frac{x_1+\dots+x_{50}}{50} = 30 \Leftrightarrow x_1+\dots+x_{50}=1500$ (2).

Άρα $1550 = 60-15\lambda+1500 \Leftrightarrow 15\lambda=10 \Leftrightarrow \lambda=\frac{2}{3}$.

Δ3: Είναι

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \alpha\ln\alpha+2 = \ln\alpha^{\alpha}+2 \\ f(\beta) &= \beta\ln\beta+2 = \ln\beta^{\beta}+2 \\ f(\gamma) &= \gamma\ln\gamma+2 = \ln\gamma^{\gamma}+2 \\ f(e) &= e+2 = e+2 \\ f'(\tfrac{1}{e}) &= \ln\tfrac{1}{e}+1 = \ln e^{-1}+1=0 \end{aligned}$$

$f'(\frac{1}{e})+f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e) = 0+\ln\alpha^{\alpha}+2+\ln\beta^{\beta}+2+\ln\gamma^{\gamma}+2+e+2 = e+8+\ln\alpha^{\alpha}\beta^{\beta}\gamma^{\gamma} = e+8+7=e+15$.

Μελετάμε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

$f(x)=x\ln x+2 \Leftrightarrow f'(x)=\ln x+1$.

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1 \Leftrightarrow x=\frac{1}{e}$

x	0	$1/e$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Είναι $\frac{1}{e}<\alpha<\beta<\gamma<e$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\frac{1}{e}, e]$ θα είναι $f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$. Επιπλέον $\alpha>\frac{1}{e} \Leftrightarrow f(\alpha)>f(\frac{1}{e}) = \frac{1}{e}\ln e^{-1}+2 = -\frac{1}{e}+2 = \frac{2e-1}{e}>0=f'(\frac{1}{e})$

Άρα είναι $f'(\frac{1}{e})<f(\alpha)<f(\beta)<f(\gamma)<f(e)$ με $R=f(e)-f'(\frac{1}{e})=e+2-0=e+2$

και $\bar{x}=\frac{f'(\frac{1}{e})+f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)+f(e)}{5} = \frac{e+15}{5}$

Δ4. Για να σχηματίζει η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(t, f(t))$ με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία πρέπει $\lambda_{εφ}>0 \Leftrightarrow f'(t)>0 \Leftrightarrow \ln t+1>0 \Leftrightarrow \ln t>-1 \Leftrightarrow t>\frac{1}{e}$. Άρα $A=\{t_{11}, t_{12}, \dots, t_{30}\}$

Για το ενδεχόμενο B είναι $t\ln t+2>\ln t+2 \Leftrightarrow t\ln t>\ln t$ (1)

Όμως $t<1 \Leftrightarrow \ln t<0$. Άρα η ανίσωση γίνεται $t<1$.

Άρα $B=\{t_1, \dots, t_{29}\}$.

Οι πιθανότητες λοιπόν θα είναι με τη βοήθεια του κλασικού ορισμού:

α) $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{20}{30}$.

β) Είναι $A\cap B=\{t_{11}, t_{12}, \dots, t_{29}\}$. Άρα $P(A\cap B)=\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=\frac{19}{30}$.