

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2012**

ΘΕΜΑ Α

A1. ΣΕΛ. 31

A2. ΣΕΛ. 148

A3. ΣΕΛ. 96

A4. α. Λ, β. Σ, γ. Λ, δ. Σ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

B1.

Από το πολύγωνο παρατηρούμε ότι το 50% των παρατηρήσεων βρίσκεται έως 25 λεπτά άρα $\delta = 25$

B2.

Η διάμεσος είναι 25 άρα $F_2\% = 50\%$ άρα $\frac{a+4+3a-6}{7a+4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 8$

	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5,15)	10	12	20	12	20
[15,25)	20	18	30	30	50
[25,35)	30	24	40	54	90
[35,45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

B3.

Η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 12 + 20 \cdot 18 + 30 \cdot 24 + 40 \cdot 6}{60} = 24$$

Η διακύμανση είναι

$$s^2 = \frac{(10-24)^2 \cdot 12 + (20-24)^2 \cdot 18 + (30-24)^2 \cdot 24 + (40-24)^2 \cdot 6}{60} = \frac{2352 + 288 + 864 + 1536}{60} = 84$$

Άρα $s = \sqrt{s^2} \cong 9,17$

B4.

Στην κλάση $[35,45)$ βρίσκεται το $f_4\% = (100 - 90)\% = 10\%$ των μαθητών. Άρα αναλογικά έχουμε $\frac{2}{10} = 0,2$ του ποσοστού, και επομένως $0,2 \cdot 10\% = 2\%$. Συνεπώς τουλάχιστον 37 λεπτά χρειάστηκα το $(10 - 2)\% = 8\%$ των μαθητών.

ΘΕΜΑ Γ**Γ1.**

Έχουμε τα ενδεχόμενα

Γ : « Ο μαθητής μαθαίνει γαλλικά» άρα $P(\Gamma) = \frac{3\nu}{\nu^2 + 1}$ και

Δ : « Ο μαθητής μαθαίνει Ισπανικά» άρα $P(\Delta) = \frac{\nu + 2}{\nu^2 + 1}$ και $P(\Gamma \cap \Delta) = \frac{\nu + 1}{\nu^2 + 1}$.

Για το όριο έχουμε,

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2 + 3} - 2)}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2 + 3} - 2)\sqrt{x^2 + 3} + 2}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)\sqrt{x^2 + 3} + 2} = \frac{2(-2)}{-4} = 1$$

Επομένως είναι $P(\Gamma \cup \Delta) = 1$.

Γ2.

Από το προσθετικό νόμο έχουμε

$$P(\Gamma \cup \Delta) = P(\Gamma) + P(\Delta) - P(\Gamma \cap \Delta) \Leftrightarrow 1 = \frac{3\nu}{\nu^2 + 1} + \frac{\nu + 2}{\nu^2 + 1} - \frac{\nu + 1}{\nu^2 + 1} \Leftrightarrow \nu^2 + 1 = 3\nu + 1 \Leftrightarrow \nu^2 - 3\nu = 0$$

$$\Leftrightarrow \nu = 0 \text{ ή } \nu = 3 \text{ δεκτή}$$

Η λύση $\nu = 0$ απορρίπτεται διότι από υπόθεση είναι $\nu \geq 3$.

Γ3.

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P((\Gamma - \Delta) \cup (\Delta - \Gamma))$.

Επειδή τα ενδεχόμενα $(\Gamma - \Delta) \cup (\Delta - \Gamma)$ είναι ασυμβίβαστα ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος, οπότε είναι

$$P((\Gamma - \Delta) \cup (\Delta - \Gamma)) = P(\Gamma - \Delta) + P(\Delta - \Gamma) = P(\Gamma) - P(\Gamma \cap \Delta) + P(\Delta) - P(\Gamma \cap \Delta) =$$

$$P(\Gamma \cup \Delta) - P(\Gamma \cap \Delta) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10}.$$

Γ4.

Είναι $N(\Gamma \cap \Delta) = 32$.

Επομένως σύμφωνα με το κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε

$$P(\Gamma \cap \Delta) = \frac{N(\Gamma \cap \Delta)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \frac{4}{10} = \frac{32}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(\Omega) = 80$$

ΘΕΜΑ Δ**Δ1.**

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{-(\ln x - 1)^2}{x^2}.$$

Για να βρούμε την μονοτονία της συνάρτησης λύνουμε την εξίσωση,

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-(\ln x - 1)^2}{x^2} = 0 \Leftrightarrow -(\ln x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = e.$$

Είναι $f'(x) = \frac{-(\ln x - 1)^2}{x^2} < 0$ για κάθε $x \in (0, e) \cup (e, +\infty)$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

Δ2.

Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ισούται με $(OK\Lambda M) = x \cdot f(x) = 1 + \ln^2 x$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 1 + \ln^2 x$, $x > 0$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{2 \ln x}{x}$. Λύνουμε την εξίσωση

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Ο πίνακας μεταβολής είναι,

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$		↓	↑

Ο.Ε

Είναι $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, 1]$ και $g'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < 0 \Leftrightarrow x < 1$ επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x = 1$ το $f(1) = 1$. Επομένως το ορθογώνιο $OK\Lambda M$ γίνεται ελάχιστο όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

Δ3.

Είναι $\lambda = f'(1) = 1$. Επομένως η ευθεία είναι $\varepsilon : y = -x + \beta$.

Οι παρατηρήσεις του δείγματος είναι $y_i = -x_i + \beta$, $i = 1, 2, \dots, 10$.

Η μέση τιμή του δείγματος των παρατηρήσεων είναι $\bar{y} = -\bar{x} + \beta = \beta - 10$ και η τυπική απόκλιση $s_y = |-1| \cdot s_x = 2$.

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει $CV_y \leq 01 \Leftrightarrow \frac{2}{|\beta - 10|} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow |\beta - 10| \geq 20 \Leftrightarrow \beta - 10 \geq 20$ ή $\beta - 10 \leq -20$ άρα $\beta \geq 30$ ή $\beta \leq -10$.

Δ4.

Είναι $A \subseteq B$ άρα $P(A) \leq P(A \cup B)$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε ότι $f(P(A)) \geq f(P(A \cup B))$ (1).

Είναι επίσης $A \cap B \subseteq A \cup B$ άρα $P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε ότι $f(P(A \cap B)) \geq f(P(A \cup B))$ (2).

Από το άθροισμα των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει ότι

$$f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$$